UNIDAD V CALCULO DIFERENCIAL

Introducción

Las leyes que gobiernan los fenómenos de la naturaleza se expresan habitualmente en forma de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones del movimiento de los cuerpos (segunda ley de Newton) es una ecuación diferencial, así como lo son, la ecuación que describe los sistemas oscilantes, la propagación de las ondas, la transmisión de calor, la difusión, el movimiento de partículas subatómicas, el movimiento del agua en el suelo, el flujo de agua en canales, el movimiento del agua en las plantas, el movimiento de nutrientes en las plantas, el movimiento de sales en el suelo, el movimiento de fertilizantes en el suelo, etc.

Pocas ecuaciones diferenciales tienen una solución analítica sencilla, la mayoría de las veces es necesario realizar aproximaciones, estudiar el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones. Así, en un sistema tan simple como un péndulo, la amplitud de la solución ha de ser tan pequeña y el rozamiento ha de ser tan despreciable para obtener una solución sencilla que describa aproximadamente su movimiento periódico.

Definiciones básicas

Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Ecuación diferencial ordinaria

Si la ecuación contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente entonces la ecuación se dice que es una ecuación diferencial ordinaria.

Por ejemplo

$$3\frac{dy}{dx}+4y=5$$

$$u\frac{du}{dx}+v\frac{dv}{dx}=x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+1=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{dy}{dx}\right]^5+5y=4$$

Obsérvese que en todas las ecuaciones anteriores la derivada se hace con respecto a una sola variable independiente x.

Ecuación diferencial parcial

Si la ecuación contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a varias variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial parcial.

Por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = y - x$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Obsérvese que en las ecuaciones anteriores existe más de una variable independiente. Note también que el símbolo para designar a la derivada es diferente.

Orden de la ecuación diferencial

La derivada o la diferencial de más alto orden (exponente mayor) es la que determina el orden de la ecuación diferencial.

Por ejemplo

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + x^2\frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = \ln \quad x$$ Orden 3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$ Orden 1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$ Orden 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + 1 = g(x, y)$$ Orden 2

Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales

Una ecuación diferencial es lineal si la variable dependiente y todas sus derivadas tienen exponente uno y cada coeficiente asociado depende sólo de X. Si no se cumple lo anterior se dice que la ecuación diferencial es no lineal.

La forma general de la ecuación diferencial lineal es:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Por ejemplo:

$$x^2\frac{d^3 y}{dx^3} + \cos \quad x\frac{d^2 y}{dx^2} + sen \quad x\frac{dy}{dx} + x^2 y = e^x$$ es una ecuación lineal de orden 3

$$sen \quad x\frac{d^3 y}{dx^3} + xy^2 = 0$$ es una ecuación diferencial no lineal (y esta elevada al cuadrado)

$y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + xy = x$ es una ecuación diferencia no lineal (el coeficiente no depende de x sino de y)

SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En una ecuación diferencial la incógnita no es un número, sino una función del tipo y=F(x). Hallar todas las funciones que satisfacen una determinada ecuación diferencial significa resolver la misma. Todas estas funciones que satisfacen la ecuación diferencial reciben el nombre de "soluciones o integrales". Toda ecuación diferencial admite, en general, infinitas soluciones, cuyas gráficas se llaman "curvas integrales".

Por ejemplo:

Sea la ecuación $\frac{dy}{dx} = x$ despejando dy queda dy = xdx, integrando $\int dy = \int xdx$ el resultado es entonces $y = \frac{x^2}{2} + C$ donde c es una constante de integración arbitraria.

Esta ecuación representa la ecuación de una familia o haz de curvas, cada una de las cuales puede determinarse fijando el correspondiente valor de C. Es decir, por cada punto del plano en que y = f(x) cumple ciertas condiciones impuestas, pasa una y solamente una curva que satisface a la ecuación diferencial.

Toda expresión que satisface a la ecuación diferencial, cualquiera que sea el valor de la constante C se llama "SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION".

Si fijando cualquier punto P(X_0, Y_0) por el que debe pasar necesariamente la solución de la ecuación diferencial, existe un valor único de C, y por lo tanto, de la curva integral correspondiente; que satisface la ecuación; esta recibirá el nombre de "SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION". En este caso, el punto P(X_0,Y_0) recibe el nombre de "CONDICION INICIAL", y supone el conocimiento previo de un punto de la solución, que generalmente se obtiene experimentalmente.

En el ejemplo dado $\frac{dy}{dx} = x$ la solución general de la ecuación es $y = \frac{x^2}{2} + C$ y supongamos que experimentalmente se determinó que un punto de la curva era P(2,5). O sea, que la curva que pasa por ese punto es la que corresponde a la condición inicial y = 5 y x = 2. Reemplazando estos valores en la solución general, se determina el valor de C.

$y = \frac{x^2}{2} + C \qquad 5 = \frac{2^2}{2} + C \qquad C = 5 - 2 = 3$ C es igual a 3, reemplezando el valor de C en la solución general se obtiene:

$y = \frac{x^2}{2} + 3$ que es la SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION