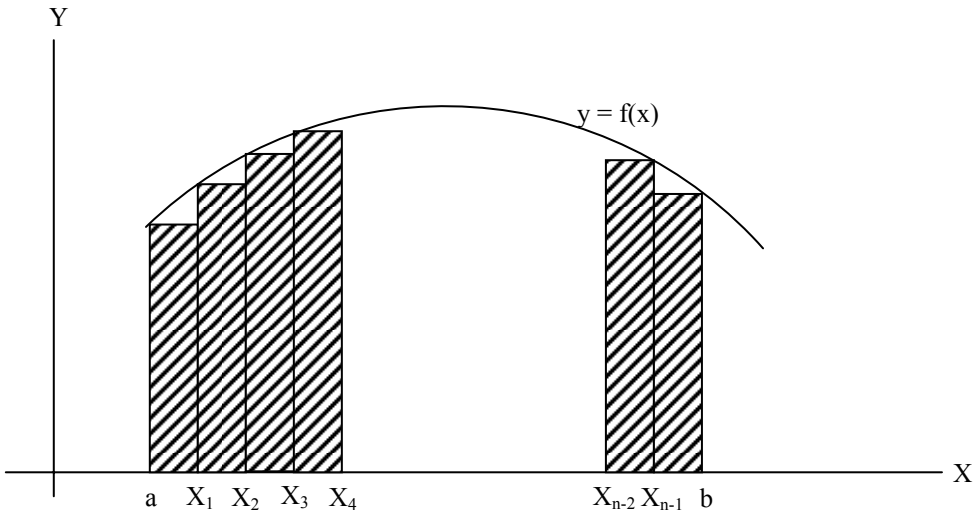
# UNIDAD IV.- CÁLCULO INTEGRAL

En la práctica de cualquier campo científico es frecuente que se presenten problemas relacionados con el cálculo de áreas, algunas veces de figuras regulares y muchas otras, con el cálculo de figuras irregulares; dentro de las primeras se tiene el área de un rectángulo, un triángulo, un cuadrado o un trapecio; dentro de las segundas se tiene el área superficial de una piedra, el área bajo una parábola cúbica, etc. Calcular el área de figuras regulares no representa ningún problema, más no así, calcular el área de figuras irregulares, las cuales se aborda con el cálculo integral.

## 4.1.- INTEGRAL DEFINIDA

Considerando la siguiente gráfica, hagamos un análisis:




$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x \ldots + f(x_n)\Delta x$

f(xi) es la altura del rectángulo y $\Delta x$ es la base del mismo,

la suma anterior se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

si esta suma tiene un valor límite cuando “n” tiende a infinito o “x” tiende a cero, entonces este límite recibe el nombre de la integral definida que va desde “a” hasta “b”, y se escribe de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx$$

esto se lee así “la integral que va desde “a” hasta “b” de f de x dx”

Así tenemos que la integral definida de una función esta dada por:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$ siempre que el límite de la derecha exista

En la definición anterior, a los números a y b se les llama límites de integración inferior y superior respectivamente. El símbolo de la integral es una “s” alargada por su relación con la palabra “suma”.

En esencia el cálculo integral es un método para determinar la distancia recorrido cuando se conoce la velocidad. Esto es evidentemente el problema inverso de la derivada, lo cual se interpreta geométricamente como el área que se describe bajo la gráfica de una curva.

**Concepto de Antiderivada**

En el cálculo integral se estudia lo siguiente:

“Dada una función f, encontrar otra función g cuya derivada sea la función f dada.”

Así que, para una función dada f, se desea encontrar otra función g para la cual $\frac{dg(x)}{dx} = f(x)$ para todo x en cierto intervalo.

**Ejemplos**

Ejemplo No. 1

Sea una función determinada f(x) = 2x. Encontrar una función g cuya derivada sea igual a f(x)

Sea f(x) = 2x entonces la función cuya derivada sería igual a f(x) es g(x) = $x^2$. La anterior es la función buscada puesto que $\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$

Ejemplo No. 2

Sea f la función determinada por f(x)=$3x^2$. Encontrar la función g cuya derivada sea igual a f(x)

g(x) sería igual a $x^3$ puesto que $\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$

En los ejemplos anteriores se encontraron dos funciones g a las cuales al determinar su respectiva derivada se encuentra la primera función dada, es decir, se encontró la “antiderivada” de la función f, de ahí que se está en posibilidades de expresar una definición que satisfaga lo anterior.

“Se dice que g es una antiderivada de una función f, si la derivada de la función g es igual a la función f en algún intervalo”.

**La integración es el proceso mediante el cual es posible obtener la antiderivada de una función.**

Para determinar la integral de $x^n$, se aplicaría la regla opuesta de la derivada que dice “aumentar el exponente en 1 y dividir el valor resultante entre el nuevo exponente n+1, así tendríamos que la integral definida para $x^n$ en [0,b] está representada por:

x toma el valor de b

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

de tal manera que:

$$\int_0^b dx = b$$

$$\int_0^b xdx = \frac{b^2}{2}$$

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

$$\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$$

en todos los casos se observa que el límite inferior es cero, sin embargo ¿Qué pasa si este límite es distinto de cero?

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si la función f(x) tiene una gráfica limitada por el intervalo cerrado [a,b] entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

siendo g(x) cualquier integral para f(x) en el intervalo cerrado [a,b]

Ejercicios

1) Evaluar la integral de $\int_3^4 x^3 dx$

la antiderivada es $g(x) = \frac{x^4}{4}$ y de acuerdo al teorema fundamental del cálculo integral:

$$\int_3^4 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_3^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{3^4}{4} = \frac{256}{4} - \frac{81}{4} = \frac{175}{4}$$

Obsérvese que para evaluar la función $g(x) = \frac{x^4}{4}$ se consideraron los valores límites [3,4] sustituyendo estos valores en la función g(x). La resta queda sustituyendo el límite superior de la integral menos la sustitución del límite inferior (teorema fundamental del cálculo integral).

2) Evaluar la integral de $\int_{-1}^5 x^2 dx$

La integral o antiderivada quedaría:

$$\int_{-1}^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral se realiza la evaluación

$$\int_{-1}^{5} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{5} = \frac{5^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{(-1)}{3} = \frac{125}{3} + \frac{1}{3} = \frac{126}{3}$$

3) Evaluar la integral de $\int_0^3 x^2 dx$

La integral o antiderivada quedaría:

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral se realiza la evaluación

$$\int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{0}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

4) Evaluar la integral de $\int_{-1}^{2} 2xdx$

La integral o antiderivada quedaría:

$$\int_{-1}^{2} 2xdx = 2\int_{-1}^{2} xdx = 2\frac{x^2}{2} = x^2$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral se realiza la evaluación

$$\int_{-1}^{2} 2xdx = \left.x^2\right|_{-1}^{2} = (2)^2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

4.2.- INTEGRALES INDEFINIDAS

En términos simples, podemos reconocer una integral indefinida como aquella que carece de límites de integración.

Sea $\int dx$ entonces si integral es x+C puesto que $\frac{d}{dx}[x + C] = 1$

Si la derivada de F(x) es igual a f(x) y la derivada de G(x) es igual a g(x) entonces:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C$$

Observe el siguiente cuadro:

| Función primitiva | Derivada | Antiderivada o integral |
|---|---|---|
| f(x) = $x^2$ | $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ | F(x) = $x^2$ + C |
| f(x) = $x^2$ - 5 | $\frac{d}{dx}\left[x^2 - 5\right] = 2x$ | F(x) = $x^2$ + C |
| f(x) = $x^2$ + 100 | $\frac{d}{dx}\left[x^2 + 100\right] = 2x$ | F(x) = $x^2$ + C |
| f(x) = $x^2$ - 1000 | $\frac{d}{dx}\left[x^2 - 1000\right] = 2x$ | F(x) = $x^2$ + C |

Obsérvese que las funciones primitivas sólo difieren de una constante, por tanto, las funciones derivadas son iguales entre sí, o sea, tienen la misma derivada, además de tener la misma antiderivada o integral. A este proceso se le denomina INTEGRAGRACION INDEFINIDA y a la función así obtenida, INTEGRAL INDEFINIDA.

Ejercicios

Desarrolle las integrales indefinidas de las siguientes funciones:

1) $\int (x^3 - x^4)dx = \int x^3 dx - \int x^4 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + c$

2) $\int (\sqrt{x} + x^3)dx = \int (x^{1/2} + x^3)dx = \int x^{1/2}dx + \int x^3 dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^4}{4} + c$

3) $\int (4x - 2x^{-1/3} + \frac{5}{x^2})dx = \int 4xdx - \int 2x^{-1/3}dx + \int \frac{5}{x^2}dx = \int 4xdx - \int 2x^{-1/3}dx + \int 5x^{-2}dx =$

$\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^{2/3}}{2/3} + 5x^{-1} + c = \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^{2/3}}{2/3} + \frac{5}{x} + c = 2x^2 - 3x^{2/3} + \frac{5}{x}$

4) $\int (3x^2 + 2x - 1)dx = \int 3x^2 dx + \int 2xdx - \int dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - x + c = x^3 + x^2 - x + c$