DERIVADAS

En matemáticas la derivada de una función es uno de los dos conceptos centrales del cálculo. El otro concepto es la antiderivada o integral; ambos conceptos están relacionados por el teorema fundamental del cálculo.

> El teorema fundamental del cálculo integral consiste en la afirmación de que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que toda función continua integrable verifica que la derivada de su integral es igual a ella misma. Este teorema es central en la rama de las matemáticas denominada cálculo.

La derivada de una función en un punto mide el coeficiente por el cual el valor de la función cambia cuando la entrada de la función cambia. Es decir, que una derivada provee una formulación matemática de la noción del coeficiente de cambio.

El concepto más generalizado de la derivada establece que: "la derivada de una función es el límite del cociente del incremento de la función [f(x+h) – f(x)] entre el incremento (h) de la variable independiente cuando h tiende a cero. Matemáticamente se representa como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

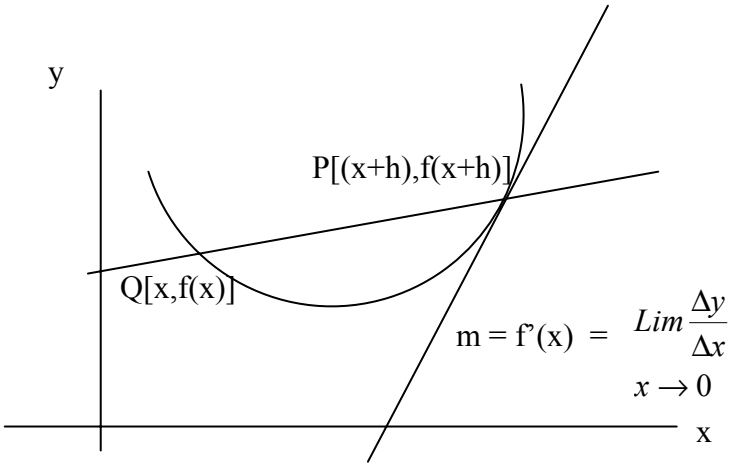
es muy común que h se defina como h=Δx y f(x+h)-f(x) = Δy, por tanto la derivada también se escribe como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

como la función depende siempre de x, entonces, la derivada de una función también depende de x así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Geométricamente, la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto cualesquiera de la curva.



La derivada es un concepto de muchos usos que se puede ver en muchos aspectos y ramas del quehacer profesional. Por ejemplo, cuando se refiere a la gráfica de dos dimensiones de f, se considera la derivada como la pendiente de la tangente del gráfico en el punto x. Se puede aproximar la pendiente de esta tangente como el límite de una secante. Con esta interpretación, pueden determinarse muchas propiedades geométricas de los gráficos de funciones, tales como concavidad o convexidad.

Algunas funciones no tienen derivada, en todos o en alguno de sus puntos. Por ejemplo, una función no tiene derivada en los puntos en que se tiene una tangente vertical, una discontinuidad o un punto anguloso.

NOTA: Lo importante del contexto de la derivada es que representa el cambio de una función con respecto a una variable, lo que se denota también, como el la velocidad de cambio de la función con respecto a la variable determinada. Por ejemplo:

$\frac{dy}{dx}$ otra forma de expresar la derivada es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ o bien, **y'**

Se lee "la derivada de "y" con respecto a "x" y significa el cambio de la función "y" con respecto a la variable "x".

$\frac{dI}{dt}$ la otra forma de expresar la derivada es $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ o bien, **I'**

Se lee "la derivada de "I" con respecto a "t" y significa el cambio de la función "I" con respecto a la variable "t".

Una derivada puede determinarse de dos formas diferentes:

a) En términos de su definición
b) Utilizando las reglas de diferenciación

Cálculo de la derivada de una función en términos de su definición

Usemos la definición de la derivada de una función para determinar la pendiente de la curva.

Ejercicio No. 1.- Determinar la derivada de la función $f(x)=x^3-x$ mediante la definición.

$f(x+h) = (x+h)^3 - (x+h)$

$f(x) = x^3-x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-(x+h)-(x^3-x)}{h}$$

desarrollando el trinomio y eliminando términos comunes

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-x^3+x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x}-h-\cancel{x^3}+\cancel{x}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2-1)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0}(3x^2+3xh+h^2-1)$$

si h=0 entonces;

$f'(x) = 3x^2 - 1$ valor de la derivada

Cálculo de la derivada en función de las reglas de diferenciación

A través de la definición de la derivada encontramos la forma para determinar el valor de la derivada de una función, sin embargo, el procedimiento resulta ser demasiado laborioso y algunas veces complicado. Para facilitar el trabajo existen algunas reglas de derivación, también conocidas como reglas de diferenciación.

1) Derivada de una constante

Si la función f(x) = C, donde C es un número real, entonces su derivada es:

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

2) La derivada de una función igual a x con respecto al mismo valor de la función

Sea la función f(x) = x entonces su derivada es:

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

3) La derivada de una constante C multiplicada por X

Sea la función f(x) = CX entonces su derivada es:

$$\frac{dCX}{dx} = C\frac{dx}{dx} = C$$

4) La derivada de una potencia de X

Sea f(x) = X^n donde n es todo número real, su derivada es:

$$\frac{dX^n}{dx} = nX^{n-1}$$

5) Derivada de una constante por una función X

Sea f(x)) = C g(x) donde C es un número real, su derivada es:

$\frac{dC \quad g(x)}{dx} = C \quad g'(x)$ lo que significa que se saca C de la derivada y se deriva la función sola, el resultado se multiplica posteriormente por C

6) Derivada de la suma de funciones

Si f(x) y g(x) son funciones diferenciables, entonces su derivada es:

$$\frac{d}{dx} f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$$

7) Derivada del producto o multiplicación de dos o más funciones

Si f(x) y g(x) son diferenciables, entonces su derivada es:

$\frac{d}{dx} f(x) * g(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$ se lee "es igual a la función f(x) que multiplica a la derivada de la función g(x) más la función g(x) que multiplica a la derivada de f(x)

8) Derivada del cociente de dos funciones

Si f(x) y g(x) son derivables, entonces su derivada es:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{g(x)^2}$$

9) Derivada de una función elevada a un exponente n

Sea f(x) una función derivable, entonces su derivada es:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n * f(x)^{n-1}\frac{df(x)}{dx}$$

Ejercicios de calentamiento

Calcule las derivadas de las siguientes funciones aplicando las reglas de diferenciación

1) $y = x^3 - x$

Aplicando las reglas 4 y 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - x) = \frac{dx^3}{dx} - \frac{dx}{dx} = 3x^2 - 1$$

2) $y = 4x^2 - x + 6$

Aplicando las reglas 3, 4, 2 y 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^2 - x + 6) = \frac{d4x^2}{dx} - \frac{dx}{dx} + \frac{d6}{dx} = 4\frac{dx^2}{dx} - \frac{dx}{dx} + \frac{d6}{dx} = (4)(2)x \quad -1 + 0 = 8x - 1$$

3) $y = \sqrt{x}$

De acuerdo con lo visto en exponente y radicales (unidad 1), se tiene que:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando la regla 4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) $g = 10$

Aplicando la regla 1

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}10 = 0$$

5) $z = -3x + 5$

Aplicando las reglas 3 y 1

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} - 3x + 5 = \frac{d - 3x}{dx} + \frac{d5}{dx} = -3\frac{dx}{dx} + \frac{d5}{dx} = -3(1) + 0 = -3$$

6) $m = 5$

Aplicando la regla 1

$$\frac{dm}{dx} = \frac{d}{dx}5 = 0$$

7) y = 1/x

De acuerdo con lo visto en la unidad 1 (exponentes y radicales):

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

Aplicando la regla 4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^{-1} = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

8) k = $3x^2+x^2-x$

Aplicando las reglas 4, 3 y 2

$$\frac{dk}{dx} = \frac{d}{dx}3x^2 + x^2 - x = \frac{d3x^2}{dx} + \frac{dx^2}{dx} - \frac{dx}{dx} = 3\frac{dx^2}{dx} + \frac{dx^2}{dx} - \frac{dx}{dx} = (3)(2)x + 2x - 1 = 6x + 2x - 1 = 8x - 1$$

Ejercicios de aplicación

1.- En un levantamiento topográfico, la función que relaciona la distancia vertical (cotas) con la distancia horizontal en un terreno es:

y = 21.2 – 0.027 x

si deseamos determinar la velocidad de cambio de la distancia vertical respecto a la distancia horizontal, obtenemos la derivada de la función y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(21.2 - 0.027x) = \frac{d}{dx}21.2 - \frac{d}{dx}0.027x = 0 - 0.027\frac{dx}{dx} = 0 - 0.027(1) = -0.027\, {}^{m}\!/_{m}$$

2.- Si el caudal de un gotero está determinado por la ecuación q = 1.172 $h^{0.572}$,
a) calcule la rapidez de cambio del gasto respecto a la carga,
b) determine esa rapidez cuando la carga (h) es igual a 15 m

a) Para determinar la rapidez de cambio se calcula la derivada de q respecto a h

$$\frac{dq}{dh} = \frac{d}{dh}\left[1.172 \quad h^{0.572}\right] = 1.172\frac{d}{dh}h^{0.572} = (1.172)(0.572)h^{0.572-1} = 0.670 \quad h^{-0.428}$$

b) Para calcular la rapidez cuando h = 15 m se sustituye este valor en la ecuación resultante de la derivada

$$\frac{dq}{dh} = 0.670 \quad (15)^{-0.428} = 0.210 \quad {}^{lph}\!/_{m}$$

3.- Determine la relación de cambio entre la precipitación efectiva y la precipitación total que se presenta durante una lluvia, considerando que la función que las relaciona es:

Pe = 1.27 P $^{0.75}$ – 0.0806 P $^{1.5}$

Se calcula la derivada de Pe

$$\frac{dPe}{dP} = \frac{d}{dP}\left[1.27 \quad P^{0.75} - 0.0806 \quad P^{1.5}\right] = \frac{d}{dP}\left[1.27 \quad P^{0.75}\right] - \frac{d}{dP}\left[0.0806 \quad P^{1.5}\right]$$

$$1.27\frac{d}{dP}P^{0.75} - 0.0806\frac{d}{dP}P^{1.5} = (1.27)(0.75) \quad P^{0.75-1} - (0.0806)(1.5) \quad P^{1.5-1}$$

Finalmente queda:

$$\frac{dPe}{dP} = 0.953 \quad P^{-0.25} - 0.121 \quad P^{0.5}$$

4.- La ecuación de infiltración de Philip es I = s t ^{½} + A t, determine la velocidad de infiltración representada por la rapidez de cambio de la infiltración con respecto al tiempo.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left[s \quad t^{1/2} + A \quad t\right] = \frac{d}{dt}s \quad t^{1/2} + \frac{d}{dt}A \quad t = s\frac{d}{dt}t^{1/2} + A\frac{dt}{dt} = s\left(\tfrac{1}{2}t^{1/2-1}\right) + A(1)$$

$$\frac{dI}{dt} = s \quad \frac{t^{-1/2}}{2} + A$$

5.- De la ecuación de Manning para determinar la velocidad de flujo de agua en un canal:
a) calcule la rapidez de cambio de la velocidad (v) con respecto a la pendiente (s)
b) calcule la rapidez de cambio de la velocidad (v) con respecto al radio hidráulico (r)

La función de Manning es $v = \frac{1}{n} \quad r^{2/3} \quad s^{1/2}$

a) Considerando que n y r son constantes se sacan de la derivada;

$$\frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{n}r^{2/3} \quad s^{1/2}\right] = \frac{1}{n}r^{2/3} \quad \frac{d}{ds}s^{1/2} = \frac{1}{n}r^{2/3} \quad \frac{1}{2}s^{1/2-1} = \frac{1}{n}r^{2/3} \quad \frac{1}{2}s^{-1/2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{n}r^{2/3} \quad \frac{s^{-1/2}}{2}$$

b) Considerando que n y s son constantes se sacan de la derivada;

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{n}r^{2/3} \quad s^{1/2}\right] = \frac{1}{n}s^{1/2} \quad \frac{d}{dr}r^{2/3} = \frac{1}{n}s^{1/2} \quad \frac{2}{3}r^{2/3-1}$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{n}s^{1/2} \quad \frac{2}{3}r^{-1/3}$$