UNIDAD III LÍMITES Y DERIVADAS

OBJETIVO: Que el alumno comprenda la definición de límite de una función y derivada de la misma, para su posterior análisis y aplicación en el área de agronomía.

Introducción

El análisis matemático es la rama de la matemática que proporciona métodos para la investigación cuantitativa de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud respecto de otras. Surge así, de manera natural, en un período en el que el desarrollo de la mecánica y la astronomía, nacidas de los problemas de la tecnología y la navegación, habían proporcionado ya un cúmulo considerable de observaciones, medidas e hipótesis y estaban impulsando a la ciencia hacia la investigación cuantitativa de las formas más sencillas de movimiento.

El nombre de “análisis infinitesimal” no dice nada sobre el objeto de estudio, sino que enfatiza el método. Se trata del método matemático especial de los infinitésimos o, en su forma moderna, de los límites.

Los matemáticos del siglo XVII se fueron percatando gradualmente de que una gran parte de los problemas que surgían de distintos tipos de movimiento (con la consiguiente dependencia de unas variables respecto a otras), así como de problemas geométricos que no se habían podido abordar con los métodos usuales, podían reducirse a dos tipos:

a) Ejemplos sencillos de problemas del primer tipo son: hallar la velocidad en cualquier instante de un movimiento no uniforme (o, en general, encontrar la velocidad de variación de una magnitud dada), y trazar una tangente a una curva dada. Estos problemas condujeron a una rama del análisis que recibió el nombre de 'cálculo diferencial'.

b) Ejemplos muy sencillos del segundo tipo de problemas son: encontrar el área de una figura curvilínea (el problema de la cuadratura), o la distancia recorrida en un movimiento no uniforme, o, en general, el efecto total de la acción de una magnitud continuamente variable. Este grupo de problemas condujo a otra rama del análisis, el 'cálculo integral'. (Aleksandrov, 1, 95-6)]

Entre todos los conceptos que se presentan en el cálculo infinitesimal, el de límite es, a no dudarlo, el más importante, y quizás el más difícil. Lo que vamos a definir no es la palabra 'límite', sino la noción de función que tiende hacia un límite.

El análisis matemático moderno utiliza un método especial, que fue elaborado en el transcurso de muchos siglos, y constituye ahora su instrumento básico. Nos referimos al método de los infinitésimos o, lo que en esencia es lo mismo, de los límites.

El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones.

Los distintos objetos y fenómenos que observamos en la naturaleza están orgánicamente relacionados unos con otros; son interdependientes. El género humano conoce desde hace tiempo las relaciones más sencillas de esta clase, y este conocimiento se halla expresado en las leyes físicas. Estas leyes indican que las distintas magnitudes que caracterizan un fenómeno dado están tan íntimamente relacionadas que algunas de ellas quedan completamente determinadas por los valores de las demás. Fueron correspondencias de esta clase las que sirvieron de origen al concepto de *función*.

Cuando se trabaja con funciones, frecuentemente nos interesa averiguar el comportamiento de una determinada función cuando la variable independiente “x”, se aproxima a un valor “a”. En otras palabras, queremos averiguar si la función se aproxima a un determinado valor “b”, aumenta indefinidamente, disminuye indefinidamente o no tiene un comportamiento claramente definido.

$\underset{x \to a}{f(x) \to b}$ f(x) tiende a “b” cuando “x” tiende hacia “a”.

Asimismo, una de las mayores dificultades que se tiene al comenzar a estudiar la derivada de una función es la comprensión de sus aplicaciones (principalmente su significado geométrico). Mientras que el cálculo de derivadas suele resultar sencillo e incluso atractivo (dada la mecánica del proceso), las aplicaciones de la derivada se convierten en un problema complejo, aunque no lo sea, debido a que en muchos casos no se ha conseguido asimilar y adquirir el concepto con claridad.

LÍMITES

Introducción

El concepto de límite de una función es fundamental en todos los campos del cálculo. Cabe decir que la derivada es por definición un límite. También lo son los conceptos de integral y diferenciales, que son temas que el estudiante se encontrará más adelante en el curso de Matemáticas aplicadas.

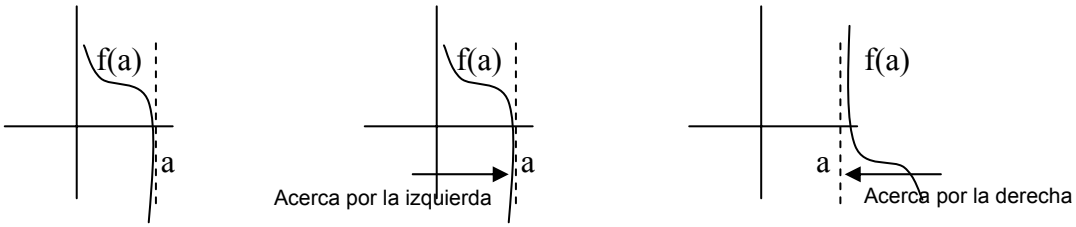
Como se mencionó anteriormente, cuando se trabaja con funciones, con frecuencia se busca averiguar el comportamiento de la función cuando la variable independiente tiende o se aproxima a un valor determinado (conocer el valor de f(x) cuando x tiende hacia “a”).

Podría pensarse que para averiguar esa cuestión bastaría con calcular el valor de la función en el punto que se esta considerando, es decir, calcular f(a). Sin embargo, en muchos casos ese cálculo no responde a la pregunta que nos hacemos por diferentes motivos:

a) Algunas veces el valor “a” no pertenece al dominio de la función, pero se encuentra en su borde; por lo tanto, en ese caso no es posible, calcular f(a) pero si tiene sentido interesarse por el comportamiento de la función en las cercanías de “a”.

b) En otras ocasiones “a” pertenece al dominio de la función, pero el comportamiento de la función cerca de “a” difiere bastante del valor de f(a).

c) Puede suceder también que el comportamiento de la función sea diferente cuando se acerca por la izquierda al punto “a”, o bien, por la derecha del punto “a”.



Conceptos preliminares

Consideremos una función real de variable real: **y = f(x)**.

Como ya sabemos, la “x” se denomina ***variable independiente***. El conjunto de valores que puede tomar esta variable recibe el nombre de **dominio** de la función, **Dom f**.

La “y” recibe el nombre de ***variable dependiente***. La “y” representa a la función, es decir, los valores que toma la “y” son los valores que toma la función f(x). El conjunto de valores que puede tomar la función se denomina **imagen, rango o recorrido** de la función y lo denotaremos **Im f**.

Concepto intuitivo de límite

El límite de una función en un punto “a”, es el valor al que tiende la función “f” en puntos muy próximos al valor de “a”.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Se lee “el límite de la función f(x) es igual a “b” cuando “x” tiende o se aproxima hacia “a”.

Ejercicios

Ejercicio 1.- Considérese la función lineal y = 2x+1 ¿A que valor se aproxima la función, cuando “x” se aproxima al valor 3?

f(x) = y (A la columna de “x” se le da valores cercanos a 3, para calcular la columna de f(x) se sustituyen los valores de la columna de “x” en la función dada)

Si x=2 f(x) = 2(2)+1 = 5
Si x=2.5 f(x) = 2(2.5)+1 = 6.0
Si x=2.7 f(x) = 2(2.7)+1 = 6.4
Si x = 2.9 f(x) = 2(2.9)+1 = 6.8
Si x = 3.0 f(x) = 2(3.0)+1 = 7.0
Y así sucesivamente hasta que x = 4
Con estos datos se llena la tabla mostrada a la izquierda.

x	f(x)
2.0	5.0
2.5	6.0
2.7	6.4
2.9	6.8
3.0	7.0
3.05	7.1
3.10	7.2
3.20	7.4
4.0	9.0

Se observa que al tomar valores de “x” muy próximos a 3, ya sean mayores o menores que él, sus imágenes se aproximan al valor de 7; cuanto mayor es la proximidad de “x” a 3, mayor es la proximidad de f(x) a 7.

Lo cual se expresa diciendo que cuando “x” tiende a 3, el límite de la función f(x) = y = 2x+1 es 7 y se escribe como sigue:

$$\lim_{x \to 3} 2x + 1 = 7$$

Ejercicio 2.- Determine el límite, cuando x tiende a 1, de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	f(x)
0.5	1.5
0.8	1.8
0.9	1.9
0.95	1.95

1	Div x 0
1.05	2.05
1.1	2.1
1.3	2.3
1.5	2.5

Para x = 0.5 f(x) = $\frac{0.5^2 - 1}{0.5 - 1}$ = 1.5

Para x = 0.8 f(x) = $\frac{0.8^2 - 1}{0.8 - 1}$ = 1.8

Para x = 1 f(x) = $\frac{1^2 - 1}{1 - 1}$ = división por cero

Esta función no esta definida en el punto x = 1, para este valor de "x", el denominador de la función es cero, y no tiene sentido en matemáticas dividir por cero. El valor al que esta función se aproxima cuando "x" tiende a 1 por la izquierda o por la derecha es 2. Entonces podemos decir, que la función tiene límite cuando "x" se aproxima a 1; el límite es 2, y se escribe:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

<u>Límite finito en un punto</u>

Se dice que la función y = f(x) tiene por límite "b" cuando "x" tiende hacia "a" y se representa por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

En esta función límite se observa que a medida que "x" se acerca hacia "a", la función f(x) se acerca hacia "b". Para cuantificar este acercamiento se utilizará la siguiente notación:

/x-a/ designa la distancia entre x y a
/f(x) – b/ designa la distancia entre f(x) y b

Tradicionalmente se utilizan letras griegas minúsculas para designar distancias pequeñas. En concreto suelen usarse las letras δ (delta) para representar la distancia entre "x" y "a"; y ε (epsilon) para representar la distancia entre f(x) y b. Del mismo modo suelen emplearse letras mayúsculas latinas intermedias (tales como K, L, etc) para representar números "muy grandes" en valor absoluto.

<u>Definición</u>

Es posible decir que "b" es el límite de la función f(x) cuando "x" tiende al punto "a", cuando sea cual sea el valor del número positivo ε, es posible encontrar otro número positivo δ, tal que si la distancia entre "x" y "a" es menor que δ, entonces la distancia entre f(x) y b es menor que ε.

En matemáticas lo anterior se representa de la siguiente manera:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ tal \ \ que \ \ si \ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$\forall$ = sea cual sea
$\exists$ = existe otro
$\Rightarrow$ = entonces

El límite finito es el caso más habitual, donde para cada valor que se le da a la “x” se obtiene un valor de y o f(x).

Ejercicios

Considérese la función $y = x^3$ y el punto x = 2

Hacer una tabla con los valores de “y” que se obtienen al dar valores a “x” desde 1.9 hasta 2, considerando valores cada vez más próximos a 2.

x	y
1.9	6.86
1.99	7.880599
1.999	7.98800599
1.9999	7.99880006
1.99999	7.99988000

Ahora hacer una tabla con los valores de “y” que se obtienen al dar valores a “x” desde 2.1 hasta 2, considerando valores cada vez más próximos a 2.

x	y
2.1	9.261
2.01	8.120601
2.001	8.012006
2.0001	8.001200
2.00001	8.000120

Como se puede observarse, si se acerca a x = 2 tanto por la derecha como por la izquierda, el valor de “y” se aproxima a 8 (un número real determinado). De lo anterior es posible concluir que una función y = f(x) tiene límite en el punto “a”, si y solo si, los límites de la función existen y son iguales cuando “x” tiende hacia “a” tanto por la derecha como por la izquierda.

Ejercicios:

Calcular el valor límite de las siguientes funciones:

a) $$\lim_{x \to 1} f(x) = x + 3$$

x	f(x)
0.9	3.9
0.99	3.99
0.999	3.999
0.9999	3.9999
1.01	4.01
1.001	4.001
1.0001	4.0001
1.00001	4.00001

Al sustituir el valor de “x” en la función se observa que los valores de f(x) se aproximan más 4 en tanto “x” se aproxime más a 1;

Para x = 0.9 f(x) = 0.9+3 = 3.9
Para x = 0.99 f(x) = 0.99+3 = 3.99
Para x = 0.999 f(x) = 0.999+3 = 3.999
Para x = 1.01 f(x) = 1.01+3 = 4.01
Para x = 1.001 f(x) = 1.001+3 = 4.001
etc

El valor de f(x) tiende a 4 cuando “x” tiende o se aproxima a 1 (por la derecha y por la izquierda); por tanto el límite de la función f(x) es 4.

b) $$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Al sustituir el valor de "x" en la función se observa que los valores de f(x) se aproximan más -4 en tanto "x" se aproxime más a -2;

x	f(x)
-1.9	-3.9
-1.99	-3.99
-1.999	-3.999
-1.9999	-3.9999
-2.01	-4.01
-2.001	-4.001
-2.0001	-4.0001
-2.000001	-4.000001

Para x = -1.9 $$f(x) = \frac{-1.9^2 - 4}{-1.9 + 2} = -3.9$$

Para x = -1.99 $$f(x) = \frac{-1.99^2 - 4}{-1.99 + 2} = -3.99$$

Para x = -2.01 $$f(x) = \frac{-2.01^2 - 4}{-2.01 + 2} = -4.01$$

Para x = -2.0001 $$f(x) = \frac{-2.0001^2 - 4}{-2.0001 + 2} = -4.0001$$

El valor de f(x) se aproxima a -4 cuando x tiende a -2 (por la derecha y por la izquierda); por lo tanto, el límite de la función es -4

c) $$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

Al sustituir el valor de "x" en la función se observa que los valores de f(x) se aproximan más 80 en tanto "x" se aproxime más a -2;

x	f(x)
-1.9	72.3901
-1.99	79.20399
-1.999	79.92004
-1.9999	79.9920004
-2.01	80.80401
-2.001	80.08004
-2.0001	80.0080004
-2.000001	80.00008

Para x = -1.9 $$f(x) = \frac{-1.9^5 + 32}{-1.9 + 2} = 72.3901$$

Para x = -1.99 $$f(x) = \frac{-1.99^5 + 32}{-1.99 + 2} = 79.20399$$

Para x = -2.01 $$f(x) = \frac{-2.01^5 + 32}{-2.01 + 2} = 80.80401$$

El valor de f(x) se aproxima a 80 cuando x tiende a -2 (por la derecha y por la izquierda); por lo tanto, el límite de la función es 80

d) $$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Al sustituir el valor de "x" en la función se observa que los valores de f(x) se aproximan más 1.5 en tanto "x" se aproxime más a 1;

x	f(x)
0.9	1.4263
0.99	1.4925
0.999	1.4992
0.9999	1.4999
1.01	1.5075
1.001	1.5007
1.0001	1.5000
1.00001	1.5000

Para x = 0.9 $$f(x) = \frac{0.9^3 - 1}{0.9^2 - 1} = 1.4263$$

Para x = 0.99 $$f(x) = \frac{0.99^3 - 1}{0.99^2 - 1} = 1.4925$$

Para x = 1.01 $$f(x) = \frac{1.01^3 - 1}{1.01^2 - 1} = 1.5075$$

Para x = 1.001 $$f(x) = \frac{1.001^3 - 1}{1.001^2 - 1} = 1.5007$$

El valor de f(x) se aproxima a 1.5 cuando x tiende a 1 (por la derecha y por la izquierda); por lo tanto, el límite de la función es 1.5

e) $$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

Al sustituir el valor de "x" en la función se observa que los valores de f(x) se aproximan más 27 en tanto "x" se aproxime más a 3;

x	f(x)
2.9	26.11
2.99	26.9101
2.999	26.991001
2.9999	26.9991
3.01	27.0901
3.001	27.009001
3.0001	27.0009
3.00001	27.00009

Para x = 2.9 $$f(x) = \frac{2.9^3 - 27}{2.9 - 3} = 26.11$$

Para x = 2.99 $$f(x) = \frac{2.99^3 - 27}{2.99 - 3} = 26.9101$$

Para x = 3.01 $$f(x) = \frac{3.01^3 - 27}{3.01 - 3} = 27.0901$$

El valor de f(x) se aproxima a 27 cuando x tiende a 3 (por la derecha y por la izquierda); por lo tanto, el límite de la función es 27

f) $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = \dfrac{343 - x^3}{x - 7}$

Al sustituir el valor de "x" en la función se observa que los valores de f(x) se aproximan más -147 en tanto "x" se aproxime más a 7;

x	f(x)
6.9	-144.9100
6.99	-146.7901
6.999	-146.9790
6.9999	-146.9979
7.01	-147.2101
7.001	-147.0210
7.0001	-147.0021
7.00001	-147.0002

Para x = 6.9 $f(x) = \dfrac{343 - 6.9^3}{6.9 - 7} = -144.9100$

Para x = 6.99 $f(x) = \dfrac{343 - 6.99^3}{6.99 - 7} = -146.7901$

Para x = 7.01 $f(x) = \dfrac{343 - 7.01^3}{7.01 - 7} = -147.2101$

Para x = 7.0001 $f(x) = \dfrac{343 - 7.0001^3}{7.0001 - 7} = -147.0021$

El valor de f(x) se aproxima a -147 cuando x tiende a 7 (por la derecha y por la izquierda); por lo tanto, el límite de la función es -147

Ejercicios propuestos:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{x^2 - x}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2x^5 - 3x^2 + 5x}{x^5 - 2x^3 + x} =$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x}{2x^3 + 3x^2 - 7x} =$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2}}{2x^3 + 3x^2 - 5x} =$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{1 - x} - 1} =$$

a) -1
b) 5
c) -3/7
d) 0.0707
e) -1

Límite infinito positivo (+)

Cuando "x" se acerca al punto "a", f(x) va creciendo indefinidamente, es decir, podemos hacer que f(x) sea tan grande como se quiera sin más que hacer que "x" se acerque suficientemente al punto "a". Se expresa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Definición

Es posible decir que el límite de la función f(x), cuando "x" tiende al punto "a", es "más infinito", cuando sea cual sea el valor del número real K, es posible encontrar otro número positivo δ, tal que si la distancia entre "x" y "a" es menor que δ, entonces f(x) es mayor que K.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \forall K \in R \ \exists \ \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

∈ = pertenece a
R = número real
⇔ = si y solo si

Ejercicios

1) Sea la función:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{x^2}$$

La función anterior tiende al infinito a medida que "x" se acerca a cero, tanto por la derecha como por la izquierda.

x	f(x)
0.1	100
0.01	10000
0.001	1000000
0.0001	100000000
-0.1	100
-0.01	10000
-0.001	1000000
-0.0001	100000000

Observe que llegando por la derecha, entre más se acerca el valor de "x" a cero, más crece el valor de f(x); del mismo modo, llegando por la izquierda, entre más se acerca el valor de "x" a cero, más crece el valor de f(x).

Se dice entonces que esta función crece hacia el más infinito cuando "x" tiende a cero, puesto que crece dentro de los números positivos.

Debe quedar claro que el infinito no es un límite. De hecho esta función no tiene un límite, pues f(x) nunca llegará o se acercara a un valor en particular bajo estas condiciones.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

2) Sea la función:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

La función anterior tiende al infinito a medida que “x” se acerca a uno por la derecha, cuando se le acerca por la izquierda la función se vuelve indeterminada, puesto que la raíz cuadrada de los números negativos genera un número imaginario.

x	f(x)
1.01	10.000
1.001	31.623
1.0001	100.000
1.00001	316.228
1.000001	1000.000
1.00000001	10000.000
1.000000001	31622.775

Observe que entre más se acerca el valor de “x” a uno, más crece el valor de f(x). Se dice entonces que esta función crece hacia el más infinito cuando “x” tiende a uno por la derecha, puesto que crece dentro de los números positivos.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \infty$$

<u>Límite infinito negativo (-)</u>

Cuando “x” se acerca al punto “a”, f(x) va decreciendo indefinidamente, es decir, podemos hacer que f(x) sea tan pequeño como se quiera sin más que hacer que “x” se acerque suficientemente al punto “a”. Se expresa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

<u>Definición</u>

Es posible decir que el límite de la función f(x), cuando “x” tiende al punto “a”, es “menos infinito”, cuando sea cual sea el valor del número real K, es posible encontrar otro número positivo δ, tal que si la distancia entre “x” y “a” es menor que δ, entonces f(x) es menor que K.

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \forall K \in R \ \exists \ \delta > 0 \quad |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < K$$

2) Sea la función:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{3x - \sqrt{x}}{x}$$

La función anterior tiende al menos infinito a medida que “x” se acerca a cero por la derecha, cuando se le acerca por la izquierda la función se vuelve indeterminada, puesto que la raíz cuadrada de los números negativos genera un número imaginario.

x	f(x)
0.1	-0.162
0.01	-7.000
0.001	-28.623
0.0001	-97.000
0.000001	-997.000

Observe que entre más se acerca el valor de “x” a cero, más crece el valor de f(x). Se dice entonces que esta función crece hacia el menos infinito cuando “x” tiende a cero por la derecha, puesto que crece dentro de los números negativos.

Al igual que en el infinito positivo, debe quedar claro que el infinito no es un límite. De hecho esta función no tiene un límite, pues f(x) nunca llegará o se acercara a un valor en particular bajo estas condiciones.

Referencias para consulta

http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo1.htm

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_2/Limites_de_funciones/index.htm

http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Limites/index.htm