UNIDAD II FUNCIONES

2.1 INTRODUCCIÓN.

Generalmente se hace uso de las funciones en el manejo de cifras numéricas en correspondencia con otras, debido a que se usan subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, economía, estadística, ingeniería, medicina, química, física, astronomía, geología y cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Definición
La función es una expresión matemática que indica la relación o correspondencia entre dos o más cantidades o variables.

Elementos de una función
Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto. Dos variables X y Y están asociadas de tal forma que al asignar un valor X entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a Y, se dice que Y es una función de X. La variable X, a la que se asignan libremente los valores se llama "variable independiente" mientras que la variable Y, cuyos valores dependen de los valores asignados a la variable X, se le llama "variable dependiente". Los valores permitidos de X constituyen el dominio de definición de la función y los valores que toma Y constituye su recorrido.

Notación de funciones

f(x) = la variable "f" es función de "x" ; "f" es la variable dependiente y "x" es la variable independiente.

Z(y) = la variable "Z" es función de "y"; "Z" es la variable dependiente y "y" es la variable independiente.

K(h=5) = la variable "K" es función de "h" cuando h=5; K es la variable dependiente y h es la variable independiente, 5 es el valor del dominio.

P (t) = 2t+5;
t=5;
P(t=5) = 2(5)+5 = 15

P es la variable dependiente
t es la variable independiente
5 es el dominio de t (valor permitido de t)
15 es el recorrido de P (valor que adquiere P)

Desarrollo de una función

En la diversidad de aplicaciones de funciones en el quehacer cotidiano y profesional, una función puede encontrarse desarrollada en diferentes formas. Utilizaremos tres formas comunes para desarrollar una función:

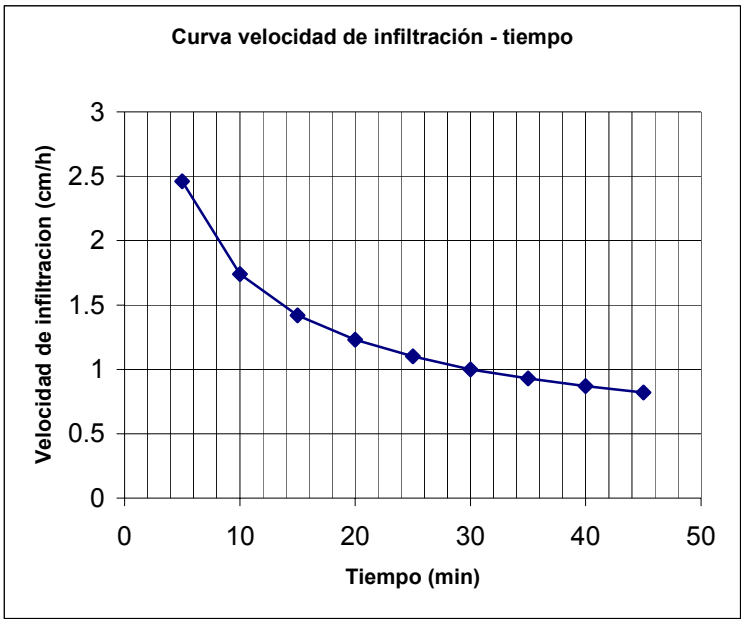
a) Tabular (mediante el uso de tabla de datos)
b) Gráfica (mediante el uso de curvas)
c) Ecuación (mediante el uso de expresiones matemáticas)

Por ejemplo, la velocidad de infiltración en un suelo es un parámetro que depende del tiempo de infiltración I(t). En este caso "I" es la velocidad de infiltración y constituye la variable dependiente; y "t" es el tiempo de infiltración y constituye la variable independiente.
Durante una prueba de infiltración en campo se obtienen datos medidos, datos de velocidad y tiempo, con los cuales es posible realizar una tabla de datos de la siguiente manera:

a) Esta es una tabla de datos que nos muestra la relación que existe entre dos variables o bien, la función de I con respecto a t.

t (min)	I (cm/h)
5	2.46
10	1.74
15	1.42
20	1.23
25	1.10
30	1.00
35	0.93
40	0.87
45	0.82

b) Estos datos tabulados pueden representarse también a través de una gráfica, como se muestra más abajo.



c) Ahora bien, un modelo matemático que expresa esta relación entre la velocidad de infiltración y el tiempo es el siguiente:

$$I = kt^n \quad \text{donde;}$$

I = velocidad de infiltración
t = tiempo
k y n son parámetros de ajuste que se obtienen de una regresión lineal.

Si k = 5.5 y n = -0.5, la función queda como sigue:

$$I = 5.5t^{-0.5}$$

Ejercicios de utilización de las tres formas de presentación de la función I (t)

1.- De acuerdo con la tabla de datos determine la velocidad de infiltración a los 25 min.

Representación matemática función
I (t=25 min)

Respuesta
I = 1.10 cm/h cuando t=25 min

2.- De acuerdo con la gráfica determine el tiempo en que se alcanzaría una velocidad de infiltración de 1 cm/h.

Representación matemática de la función
t (I = 1 cm/h)

Respuesta
t = 30 min cuando I = 1 cm/h

3.- ¿Cual sería la velocidad de infiltración a los 80 min? Utilice el modelo matemático.

Representación matemática de la función
I (t = 80 min)

Respuesta

$$I = 5.5(80)^{-0.5}$$

I = 0.61 cm/h cuando t = 80 min

4.- Con el mismo modelo matemático determine en que tiempo se alcanzaría una velocidad de infiltración de 0.2 cm/h.

Representación matemática de la función
t (I = 0.2 cm/h)

Respuesta

$$I = 5.5t^{-0.5}$$

Se despeja t de la ecuación anterior

$$\frac{I}{5.5} = t^{-0.5} \quad \text{o bien} \quad t^{-0.5} = \frac{I}{5.5}$$

Se elimina el exponente de t (leyes de radicales y exponentes)

$$\sqrt[-0.5]{\cancel{t^{-0.5}}} = \sqrt[-0.5]{\frac{I}{5.5}}$$

$$t = \sqrt[-0.5]{\frac{I}{5.5}}$$

$$t = \sqrt[-0.5]{\frac{0.2}{5.5}} = \sqrt[-0.5]{0.036} = [0.036]^{\left(\frac{1}{-0.5}\right)} = 771 \text{ min}$$

t = 771 min cuando I = 0.2 cm/h

2.2 CLASIFICACION DE FUNCIONES

Las funciones pueden ser racionales e irracionales a las que también se les llama funciones algebraicas; asimismo, existen las funciones trascendentes dentro de las cuales se ubican las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

$$\text{Funciones}\begin{cases}\text{Algebraicas}\begin{cases}\text{Polinómicas}\\ \text{Racionales}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Trascendentes}\begin{cases}\text{Exponenciales}\\ \text{Logarítmicas}\\ \text{Trigonométricas}\end{cases}\end{cases}$$

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Funciones polinómicas

Son aquellas funciones cuya expresión algebraica es un polinomio, es decir, las funciones polinómicas tienen como dominio de definición todo el conjunto de los números reales (R), puesto que a partir de una expresión polinómica y sustituyendo el valor de x por el número real que hayamos seleccionado, podemos calcular sin ningún problema el número real imagen. A continuación se muestran algunos ejemplos de funciones polinómicas:

$$f(x) = 3x^5 - 8x + 10$$

$$f(x) = 2x + 3$$

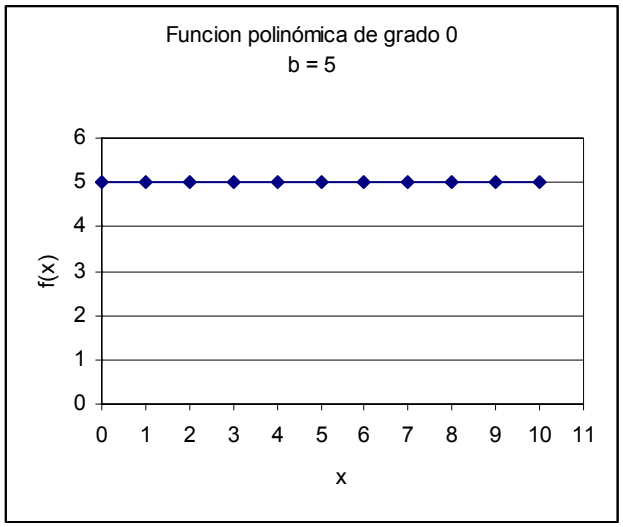
$$f(x) = 5$$

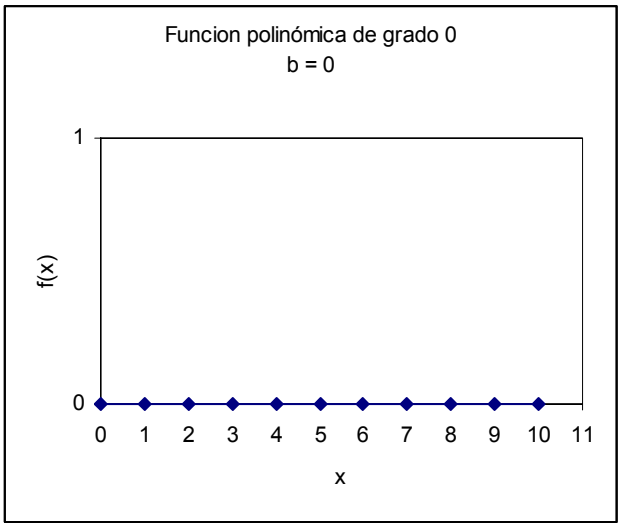
$$f(x) = 2x^2 - 5x + 8$$

Función polinómica de grado 0 (cero)

Llamada habitualmente función constante, su expresión general es f(x) = b, siendo b un número real cualquiera. Su gráfica es una recta paralela al eje X, situada a una distancia |b| (valor absoluto de b) del eje X, hacia arriba si b > 0 y hacia abajo si b < 0. Si b = 0 coincide con el eje X.

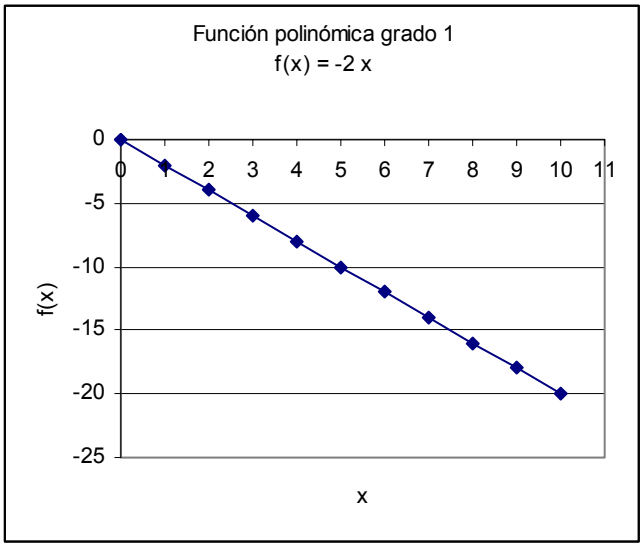
$$f(x) = 5 \qquad\qquad f(x) = 0$$

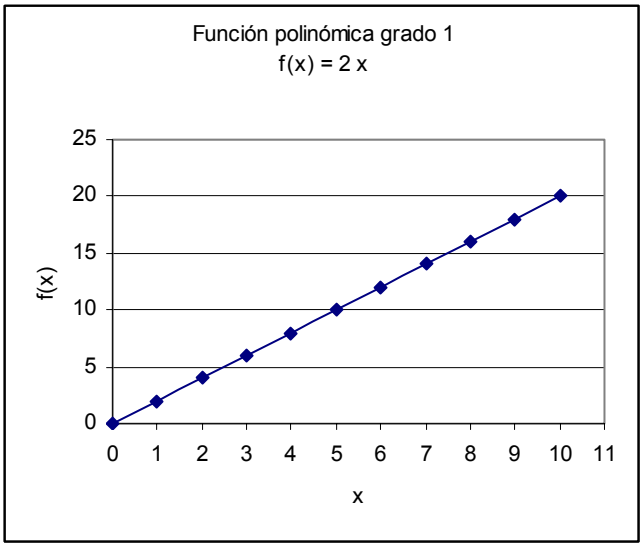




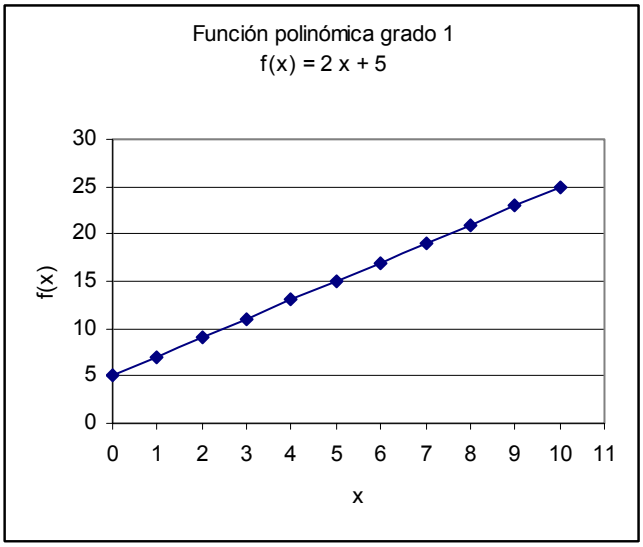
Función polinómica de grado 1

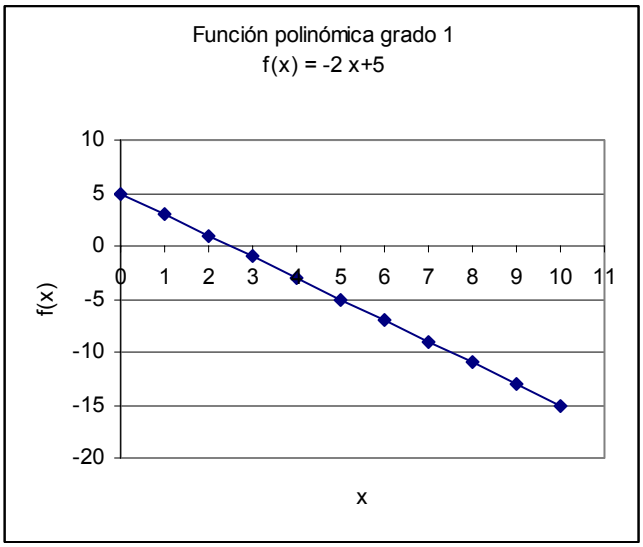
Hay dos tipos de funciones polinómicas de grado 1, la *función lineal*, cuya expresión general es f(x) = mx, con a b= 0, siendo su gráfica una recta oblicua que pasa por el origen de coordenadas (0, 0), de modo que si a > 0 la recta está inclinada hacia la derecha y si a < 0 la recta está inclinada hacia la izquierda.





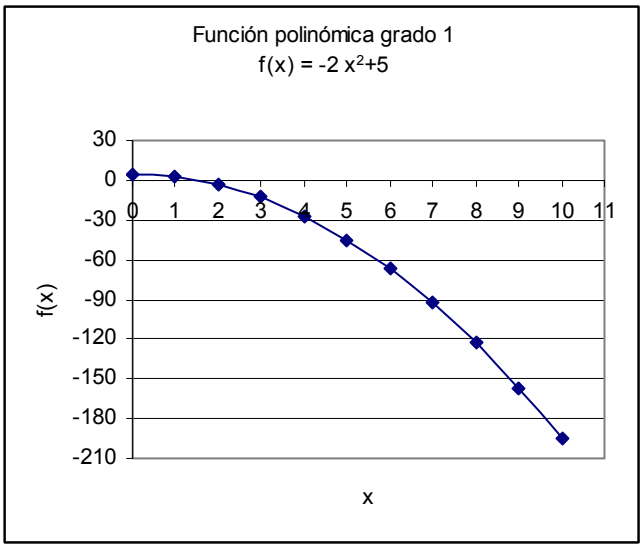
El segundo tipo es la *función afín*, cuya expresión general es f(x) = mx + b, si b= 0 entonces su gráfica es una recta oblicua. El significado de “m” es equivalente al caso de la función lineal y recibe el nombre de pendiente mientras que a la constante “b” se le llama ordenada en el origen.

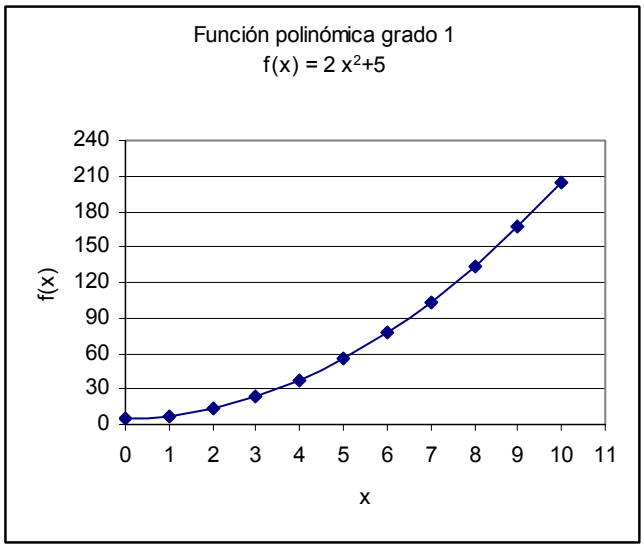




Función polinómica de grado 2

Llamada también *función cuadrática*, su expresión general viene dada por $f(x) = mx^2+bx+c$, con a b= 0.





Funciones racionales

Las funciones racionales son funciones obtenidas al dividir un polinomio por otro polinomio diferente de cero. Para una única variable x una función racional se puede escribir como:

donde y(x) y z(x) son polinomios y x es una variable indeterminada; el dominio de f (valores que f puede tomar) consiste en todos los números reales excepto los ceros del denominador z(x). Existe la posibilidad de encontrar valores de x tales que z(x) sea nulo. Por este motivo las funciones racionales están definidas en todos los números que no anulan el polinomio denominador. Las funciones racionales tienen diversas

aplicaciones en el campo del análisis numérico para interpolar o aproximar los resultados de otras funciones más complejas.

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{}{x-2}$$ Dominio: todo número real de x excepto x = 2

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-9}$$ Dominio: todo número real de x excepto x = $\pm$ 3

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x^2+4}$$ Dominio: todos los número reales de x

<u>Funciones irracionales</u>

Una función irracional es aquella donde la variable independiente "x" aparece dentro de un radical o bien elevada a un exponente fraccionario. A continuación se muestran algunos ejemplos de este tipo de funciones.

$$f(x) = \sqrt{x^2-3} = \left(x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-9}}{3x} = \frac{\left(x^2-9\right)^{1/3}}{3x}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^3-8}}{\sqrt[4]{x^2+4}} = \frac{\left(x^3-8\right)^{1/5}}{\left(x^2+4\right)^{1/4}}$$

<u>FUNCIONES TRASCENDENTES</u>

Las funciones que no son algebraicas se llaman funciones trascendentes.

Son funciones trascendentales elementales las siguientes:

<u>Función exponencial:</u>

f(x)=$\mathbf{a^x}$; a > 0, a ¹ 1.

<u>Función logarítmica:</u>

f(x)=$\mathbf{\log_a(x)}$; a > 0, a ¹ 1. Es inversa de la exponencial.

<u>Funciones trigonométricas:</u>

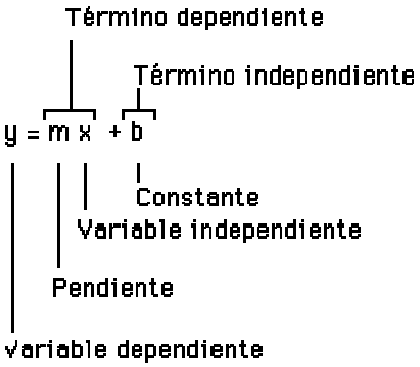
También llamadas circulares
f(x)=sen(x); f(x)=cos(x); f(x)=tg(x); f(x)=cosec(x); f(x)=sec(x) y f(x)=cotg(x)

En los puntos siguientes de esta Unidad II se revisarán las funciones polinómicas dentro de las algebraicas (lineal, afín, cuadrática y cúbica) y las funciones trascendentes (exponencial, logarítmicas y trigonométricas).

2.3 FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN

Definición.

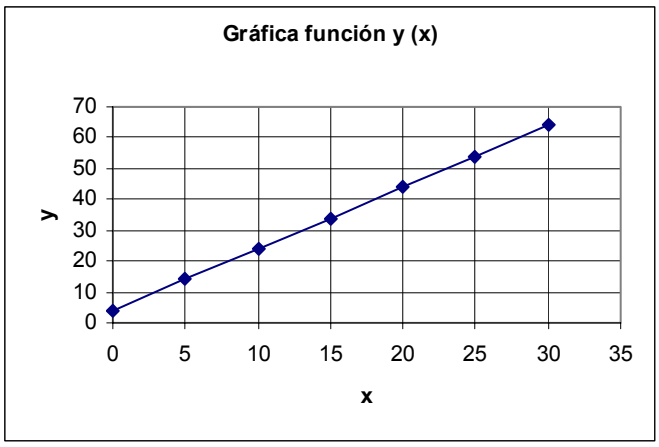
Una función lineal esta dada por la ecuación $y = mx + b$ donde m y b son números reales llamados "pendiente" y "ordenada" respectivamente. Su gráfica es una recta.



Gráfica de una función lineal.

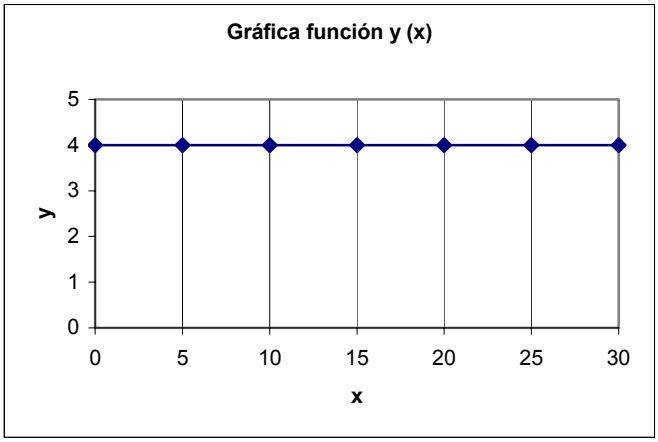
En la siguiente gráfica m = 2 y b = 4, la función lineal queda:

$y(x) = 2x + 4$



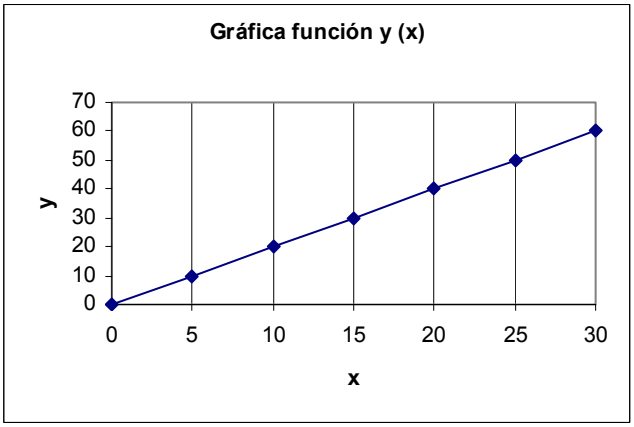
x	y
0	4
5	14
10	24
15	34
20	44
25	54
30	64

Dada la ecuación y = mx + b si m = 0 entonces y = b, lo que indica una función constante, cuya gráfica es una recta paralela al eje X que pasa por el punto (0,b).



x	y
0	4
5	4
10	4
15	4
20	4
25	4
30	4

Si b = 0 entonces y = mx. Esta ecuación tiene por gráfica una recta que pasa por el origen de coordenadas (0,0).



x	y
0	0
5	10
10	20
15	30
20	40
25	50
30	60

APLICACIÓN DE FUNCIONES LINEALES EN EL CAMPO DE INTERÉS DEL INGENIERO AGRÓNOMO.

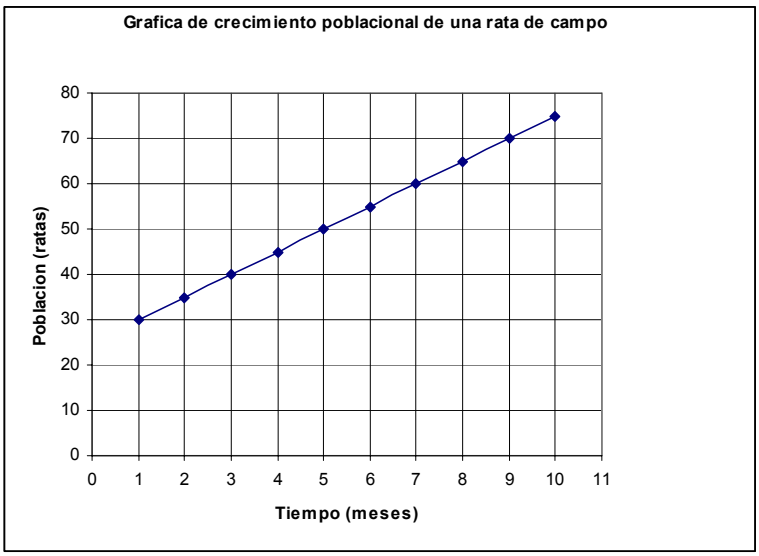
Ejercicio No. 1.- En un lote experimental para determinar la producción de un cultivo dado en función de la superficie se obtuvieron los siguientes datos:

Superficie (ha) (x)	Producción (ton) (y)
1	30
2	35
3	40
4	45
5	50
6	55
7	60
8	65
9	70
10	75

a) Realice la gráfica de los datos anteriores en un plano de ejes coordenados X, Y
b) Obtenga la ecuación de la función

a) Realización de la Gráfica.

Con los datos "x" y "y" de la tabla de datos se obtiene la siguiente gráfica representada por una línea recta.



b) Cálculo de la ecuación de la función.

Para determinar la ecuación de la función se parte de que la función es lineal, por tanto la curva es un recta y la ecuación deber ser del tipo y = mx +b

Para calcular el valor de la pendiente (m) se toman dos puntos cualesquiera de la recta y se muestran sus coordenadas (x, y); si al primero se le denomina R1 y al segundo R2 las coordenadas para x=2 y y=35, x=8 y y=65, se escribiría como sigue: R_1 (2,35) y para R_2 (8,65).

Datos
$x_1 = 2$
$y_1 = 35$
$x_2 = 8$
$y_2 = 65$

Para calcular la pendiente (m) se utiliza la siguiente ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{65 - 35}{8 - 2} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\boxed{m = 5}$$

Para conocer el valor de ordenada (b) se parte de la ecuación general de la recta:

y = mx + b

Se toma cualquiera de los puntos (ya sea R_1 o R_2, o cualquier otro de la tabla de datos o de la gráfica)

R_2 (8,65)
$y_2 = 65$
$x_2 = 8$

se sustituyen los valores de “x” y “y” en la ecuación general de la recta, quedando como sigue:

65 = 5(8) + b

Se despeja el valor de b

b = 65 – 5(8) = 65 – 40 = 25

$$\boxed{b = 25}$$

conociendo el valor de la pendiente (m) y de la ordenada (b) es posible escribir la ecuación general de la función:

$$\boxed{y = 5x + 25}$$

Ejercicio No. 2.- La recta de una función pasa por los puntos A(40,56) y B(35,53.5).

a) Determine el valor de la pendiente de la recta (m)
b) Calcule el valor de la ordenada (b)
c) Escriba la ecuación general que representa la función que pasa por los puntos A y B.

a) <u>Cálculo de la pendiente (m)</u>

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$y_1 = 56$
35
$y_2 = 53.5$

$$m = \frac{53.5 - 56}{35 - 40} = \frac{-2.5}{-5} = 0.5$$

$$\boxed{m = 5}$$

b) <u>Cálculo de la ordenada (b)</u>

Para conocer el valor de ordenada (b) se parte de la ecuación general de la recta:

y = mx + b

Se toma cualquiera de los puntos (ya sea A o B)

A(40,56)
$y_2 = 56$
$x_2 = 40$

se sustituyen los valores de “x” y “y” en la ecuación general de la recta, quedando como sigue:

56 = 0.5(40) + b

Se despeja el valor de b

b = 56 – 0.5(40) = 56 – 20 = 36

$$\boxed{b = 36}$$

conociendo el valor de la pendiente (m) y de la ordenada (b) es posible escribir la ecuación general de la función:

$$\boxed{y = 0.5x + 36}$$

Ejercicio No. 3.- En el levantamiento topográfico de un terreno, resulta que a los 20 m del punto inicial existe una cota (elevación) de 18.5 m y a los 60 m la cota (elevación) es de 17.8 m. Determine el valor de la pendiente natural del terreno entre los 20 y 60 m, y escriba la ecuación de la función.

Datos

$y_2^2 = 17.8$

c) <u>Cálculo de la pendiente (m)</u>

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{17.8 - 18.5}{60 - 20} = \frac{-0.7}{40} = -0.0175$$

m = -0.0175

d) <u>Cálculo de la ordenada (b)</u>

Para conocer el valor de ordenada (b) se parte de la ecuación general de la recta:

y = mx + b

Se toma cualquiera de los puntos:

(20,18.5)
$y_2 = 18.5$
$x_2 = 20$

se sustituyen los valores de "x" y "y" en la ecuación general de la recta, quedando como sigue:

18.5 = -0.0175(20) + b

Se despeja el valor de b

b = 18.5 – (-0.0175)(20) = 18.5 – (-0.35) = 18.5 + 0.35

b = 18.85

conociendo el valor de la pendiente (m) y de la ordenada (b) es posible escribir la ecuación general de la función:

y = -0.0175x + 18.85

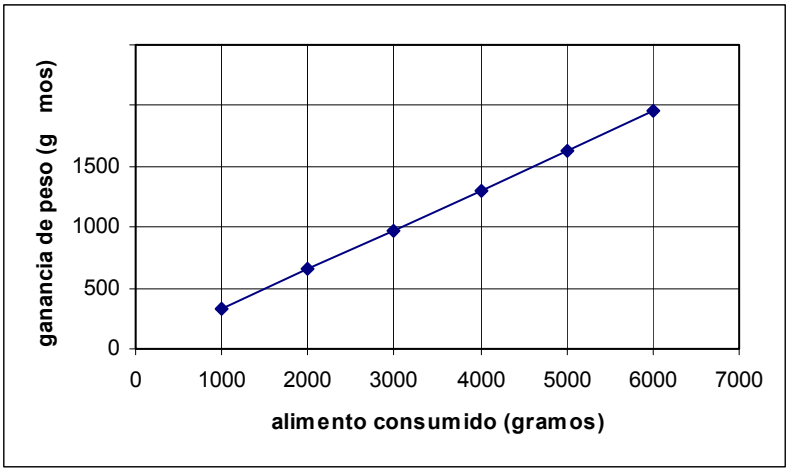
Ejercicio No. 4.- En una granja de puercos se analizó la Ganancia de Peso (GDP) en cerdos en su etapa de crianza en función de la cantidad de alimento consumido y se obtuvo la siguiente tabla de datos:

Consumo (gramos)	GDP (gramos)
1000	325
2000	650
3000	975
4000	1300
5000	1625
6000	1950

a) Realice una gráfica con los datos.
b) Mencione qué tipo de función es.

b) Obtenga la ecuación de la función que representa los datos obtenidos.

a) La gráfica que representa los datos de la tabla es la siguiente:



b) Especificar que tipo de función representan los datos tabulados.

Al graficar los datos se observa que representan una línea recta, por lo que es posible deducir que se trata de una **función lineal**.

c) Obtener la ecuación que representa la función.

Seleccionar dos puntos cualquiera de la gráfica o de la tabla, con sus respectivas coordenadas x,y, por ejemplo podríamos tomar el punto 1 al que denominaremos C1 con sus respectivas coordenadas C1(1000,325) y el punto 4 al que llamaremos C4(4000,1300).

Datos

$x_2 = 4000$
$y_2 = 1300$

e) Cálculo de la pendiente (m)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{1300 - 325}{4000 - 1000} = \frac{975}{3000} = 0.325$$

m = 0.325

f) Cálculo de la ordenada (b)

Para conocer el valor de ordenada (b) se parte de la ecuación general de la recta:

y = mx + b

Se toma cualquiera de los puntos de la recta:

C4(4000,1300)
$y_2 = 1300$

$x_2 = 4000$

se sustituyen los valores de “x” y “y” en la ecuación general de la recta, quedando como sigue:

1300 = 0.325(4000) + b

Se despeja el valor de b

b = 1300 – (0.325)(4000) = 1300 – 1300 = 0

conociendo el valor de la pendiente (m) y de la ordenada (b) es posible escribir la ecuación general de la función:

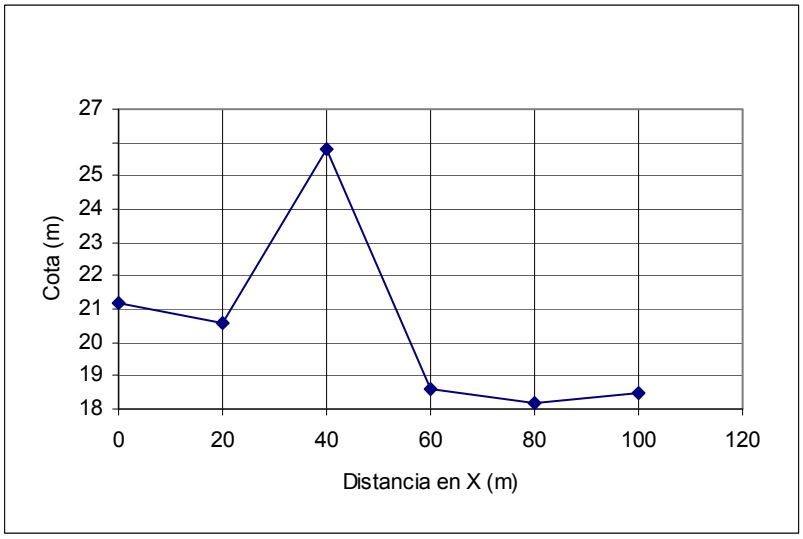
$$y = 0.325x$$

Ejercicio No. 5.- En un levantamiento topográfico del perfil de un terreno obtienen los datos que a continuación se muestran en la tabla:

Estación (x)	Cota (y)
0	21.2
20	20.6
40	25.8
60	18.6
80	18.2
100	18.5

a) Dibuje el perfil del terreno en coordenadas x,y
b) Determine la pendiente natural del terreno en cada tramo y la pendiente general del terreno.
c) Escriba la ecuación de la función para cada tramo

a) Gráfica del perfil topográfico del terreno



b) Cálculo de la pendiente natural en cada tramo del perfil

Tramo 0-20

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{20.6 - 21.2}{20 - 0} = \frac{-0.6}{20} = -0.03$$

m = -0.03

Tramo 20-40

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{25.8 - 20.6}{40 - 20} = \frac{5.2}{20} = 0.26$$

m = 0.26

Tramo 40-60

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{18.6 - 25.8}{60 - 40} = \frac{-7.2}{20} = -0.36$$

m = -0.36

Tramo 60-80

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{18.2 - 18.6}{80 - 60} = \frac{-0.4}{20} = -0.02$$

m = -0.02

Tramo 80-100

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{18.5 - 18.2}{100 - 80} = \frac{0.3}{20} = 0.015$$

m = 0.015

La pendiente natural en el tramo total 0 – 100

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{18.5 - 21.2}{100 - 0} = \frac{-2.7}{100} = -0.027$$

m = -0.027

<u>c) Se determina la ecuación de la función en cada tramo del perfil</u>

Tramo 0-20

y = mx + b
20.6 = (- 0.03)(20) + b
b = 20.6 + 0.6 = 21.2

b = 21.2

Tramo 20-40

y = mx + b
25.8 = (0.26)(40) + b
b = 25.8 - 10.4 = 15.4

b = 15.4

Tramo 40-60

y = mx + b
18.6 = (-0.36)(60) + b
b = 18.6 + 21.6 = 40.2

b = 40.2

Tramo 60-80
y = mx + b
18.2 = (-0.02)(80) + b

b = 19.8

b = 18.2 + 1.6 = 19.8

Tramo 80-100
y = mx + b
18.5 = (0.015)(100) + b
b = 18.5 – 1.5 = 17

$b = 17$

La pendiente natural en el tramo total 0 – 100
y = mx + b
18.5 = (-0.027)(100) + b
b = 18.5 + 2.7 = 21.2

$b = 21.2$

Las ecuaciones son:

Tramo	Función
0 - 20	y = 21.2 - 0.03x
20 - 40	y = 0.26x + 15.4
40 - 60	y = 40.2 - 0.36x
60 -80	y = 19.8 - 0.02x
80 - 100	y = 0.015x + 17
0 - 100	y = 21.2 – 0.027x

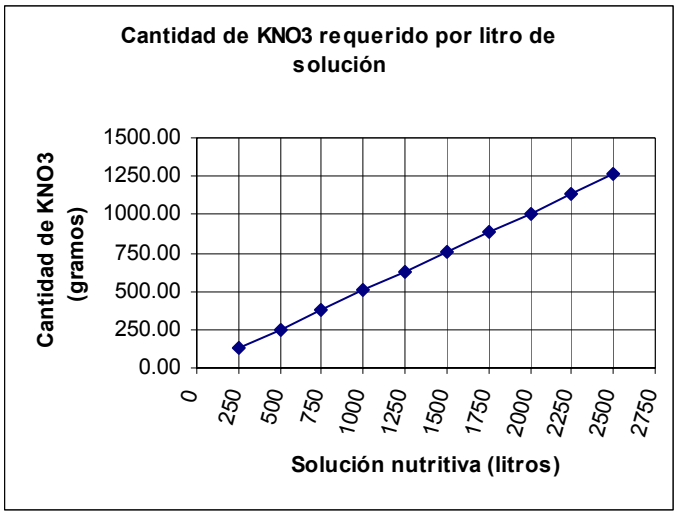
EJERCICIOS PROPUESTOS PARA RESOLVER COMO TAREA.

1.- En una presa de almacenamiento se midió la presión hidrostática a dos profundidades diferentes; la primera a una profundidad (Z1) de 12 m, y la segunda a una profundidad (Z2) de 20 m. Las presiones hidrostáticas medidas son de 117600 N/m2 para la primera profundidad y 196000 N/m2 para la segunda profundidad.

a) Considerando que la relación presión hidrostática-profundidad es una función lineal, determine el valor de la pendiente de la recta (m)
b) Calcule el valor de la ordenada (b)
c) Escriba la ecuación de la recta
d) ¿Cual sería la presión hidrostática a los 30 m de profundidad?

2.- En la preparación de una solución fertilizante se obtuvo la siguiente gráfica donde se relaciona la cantidad de nitrato de potasio (KNO_3) que se debe aplicar dependiendo de la cantidad de solución nutritiva a preparar.

a) Determine la ecuación de la recta que representa la función
b) ¿Que cantidad de KNO_3 se debe aplicar a la solución si se requieren 5000 litros de solución nutritiva?



3.- En un laboratorio de análisis de suelos y plantas se hicieron algunos cálculos para determinar la cantidad de Sulfato de potasio (K_2SO_4) que se debe agregar a una solución dependiendo de la cantidad de solución nutritiva (para un productor en particular) que se quiere preparar. Con la tabla de datos obtenida:

a) Grafique los resultados.
b) Determine la ecuación de la función.
c) Mencione de qué tipo de función se trata.
d) Utilizando la ecuación de la función calcule cual sería la cantidad de sulfato de potasio (K_2SO_4) que se debería agregar si el tanque fertilizante tiene una capacidad de 800 litros.

Solucion(lt)	K_2SO_4 (gr)
250	2.80
500	5.60
750	8.40
1000	11.20
1250	14.00
1500	16.80
1750	19.60
2000	22.40
2250	25.20
2500	28.00

4.- Un agrónomo responsable de una estación agroclimatológica desea realizar una gráfica que relaciona la temperatura expresada en grados Fahrenheit y en grados Kelvin, esto le facilitaría la conversión de unidades de temperatura en la realización de su trabajo. Si la ecuación que relaciona ambas temperaturas es la siguiente:

°F = °K*1.8 - 459.67

a) ¿Es una función lineal? Si o No. Justifique su respuesta (Mencione que características tiene la función para identificarla como lineal o no).
b) Si es una función lineal ¿Cual sería el valor de la pendiente (m) y cuál sería el valor de la ordenada (b).
c) Realice una tabla de datos y su respectiva gráfica considerando una variación de la temperatura desde 273.15°K hasta 373.15°K.

2.4 FUNCIONES CUADRÁTICAS

Definición.

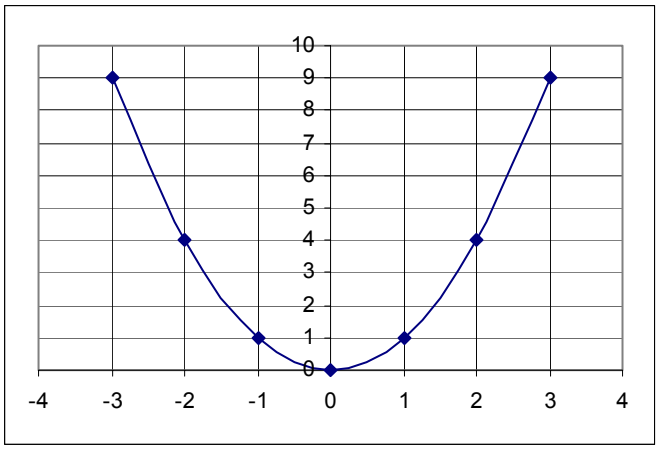
Una función cuadrática es toda función que pueda escribirse de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; donde a, b y c son números cualesquiera con la condición de que "a" sea distinto de cero.

> Reflexión: ¿Que pasaría si a = 0? Obsérvese que el término cuadrático (x^2) se haría cero, por lo tanto la ecuación representaría una función lineal.
>
> NOTA: La característica principal y que identifica a las funciones cuadráticas es su término elevado al cuadrado.

Gráfica de una función cuadrática.

La función cuadrática más sencilla es $f(x) = x^2$; cuya gráfica es una parábola.

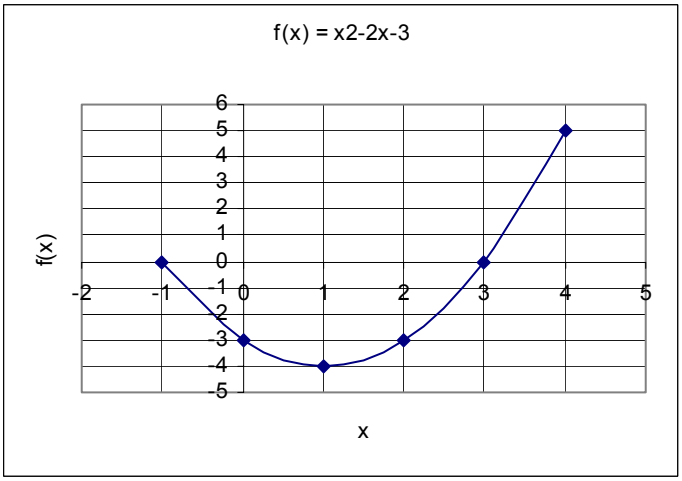
x	$f(x) = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Funciones cuadráticas más complejas se dibujan de la misma forma:

$f(x) = x^2 – 2x - 3$

x	$f(x) = x^2-2x-3$
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5



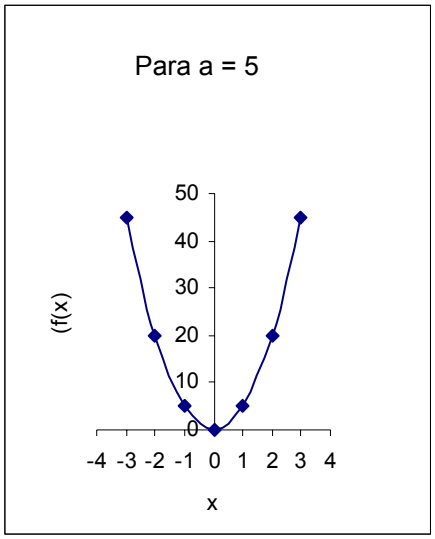
NOTA: La gráfica de una función cuadrática es una parábola; dependiendo de los valores que se le den a la x, puede resultar una parábola completa o una parábola parcial, como en los casos anteriores.

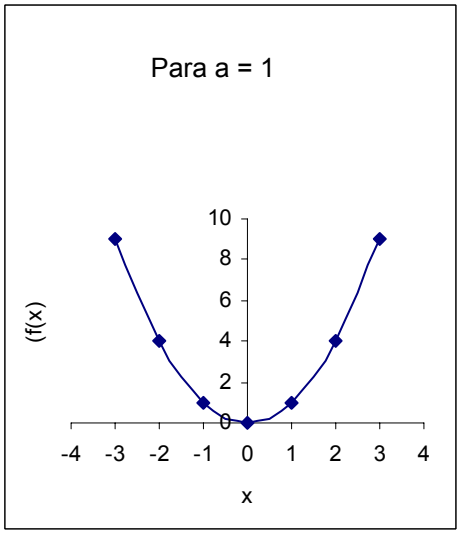
OBSERVACIONES IMPORTANTES

Las parábolas de ecuación $y=ax^2$ tienen por vértice el punto (0,0) (Obsérvese la primera parábola mostrada anteriormente).

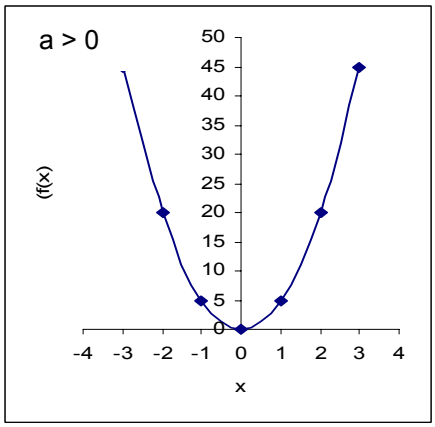
Cuanto mayor sea el valor absoluto de “a” , más cerrada será la parábola, y viceversa, a valores absolutos menores de “a”, la parábola es más abierta.

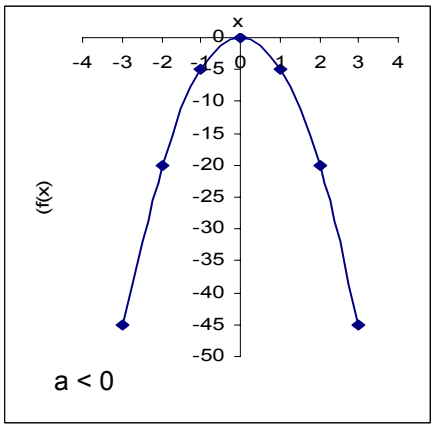
Reflexión: Realizar una reflexión con los alumnos acerca del significado de “valor absoluto”, para garantizar el entendimiento de la expresión.





Las ramas van hacia abajo si a<0 y hacia arriba si a>0.





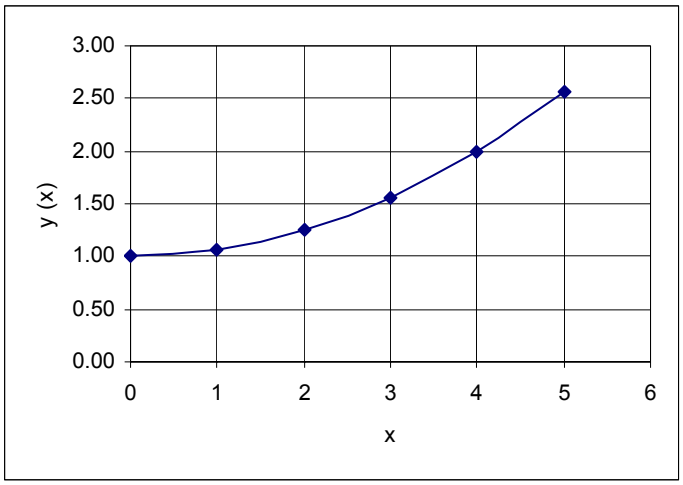
NOTA: La forma de una parábola depende única y exclusivamente del coeficiente "a" relacionado con el término cuadrático "x^2", es decir, cualquier parábola del tipo $y=ax^2+bx+c$ tiene la misma forma que la parábola $y=ax^2$.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Ejercicio No. 1.- Utilizando la ecuación de la función que abajo se señala, dibuje la gráfica dando valores a x desde0 hasta 5.

$$y = \frac{16 + x^2}{16}$$

x	y(x)
0	1.00
1	1.06
2	1.25
3	1.56
4	2.00
5	2.56



Obsérvese que la gráfica es una parábola parcial; agregando valores a la x desde -1 hasta -5 se obtendría la parábola completa.

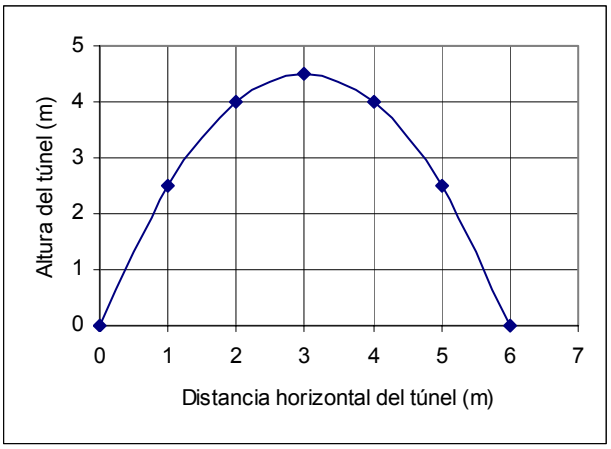
Ejercicio No. 2.- Se debe excavar un túnel de 100 m de largo, la boca del túnel está dada por la ecuación que abajo se indica, para x = 0 hasta 6.

$$y(x) = \frac{x(6-x)}{2}$$

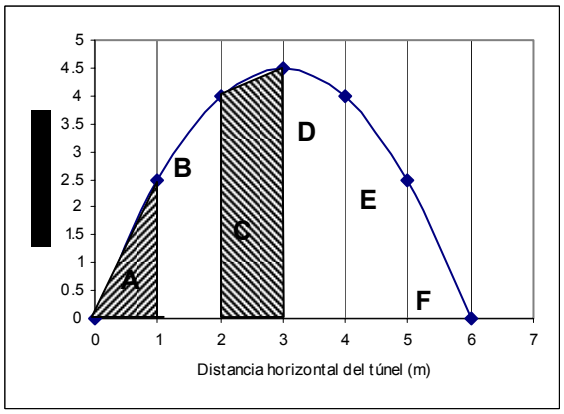
a) Grafique la función para conocer la forma de la boca del túnel.
b) Estime el volumen de tierra y roca que hay que extraer en la construcción.

a) La entrada del túnel corresponde a una parábola como se observa a continuación:

x	y(x)
0	0
1	2.5
2	4
3	4.5
4	4
5	2.5
6	0



Para determinar el volumen de material se debe calcular el área bajo la curva y multiplicarse por la longitud del túnel. Para calcular el área bajo la curva se puede usar cálculo integral, sin embargo, es un tema que se verá más adelante, por ahora, se usará un método de discretización del área, es decir se dividirá el área bajo la curva en partes más pequeñas, como se muestra en el dibujo siguiente:



Las áreas achuradas bajo la curva corresponden a dos de las formas geométricas en que se divide el área total bajo la curva, se calcula el área de cada una de las partes como sigue:

Área de figura A
La figura A corresponde a un triángulo, por tanto, el área se calcula con:

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{(1)(2.5)}{2} = 1.25m^2$$

Área de figura B
La figura B corresponde a un trapecio, por tanto, el área se calcula con:

$$A = \frac{LA}{2} + h$$

L = lado más largo
A = lado más angosto

h = altura

$$A = \frac{(2.5+4)}{2}(1) = 3.25m^2$$

Área de la figura C
Se calcula igual que la figura B:

$$A = \frac{(4+4.5)}{2}(1) = 4.25m^2$$

Área de la figura D

$$A = \frac{(4+4.5)}{2}(1) = 4.25m^2$$

Área de la figura E

$$A = \frac{(2.5+4)}{2}(1) = 3.25m^2$$

Área de la figura F
Es igual que la figura A

$$A = \frac{(1)(2.5)}{2} = 1.25m^2$$

Área total = 1.25 + 3.25 + 4.25 + 4.25 + 3.25 + 1.25 = 17.5 m^2

Volumen = Area x Longitud = 17.5 x 100 = 1750 m^3

Ejercicio No. 3.- El techo de un invernadero está diseñado de tal forma que corresponde con la curva dada por la función:

$$y(x) = \frac{2000 - 2x^2}{100}$$

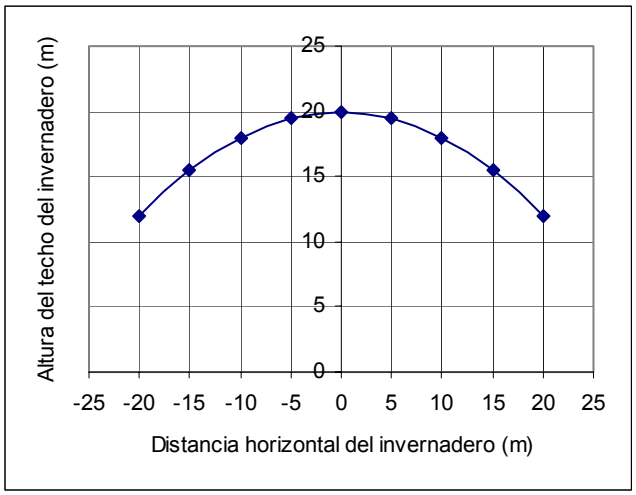
Con x tomando valores desde -20 hasta 20

Calcule el volumen del invernadero, si este mide una altura de 20 m en el punto central y tiene 50 m de largo.

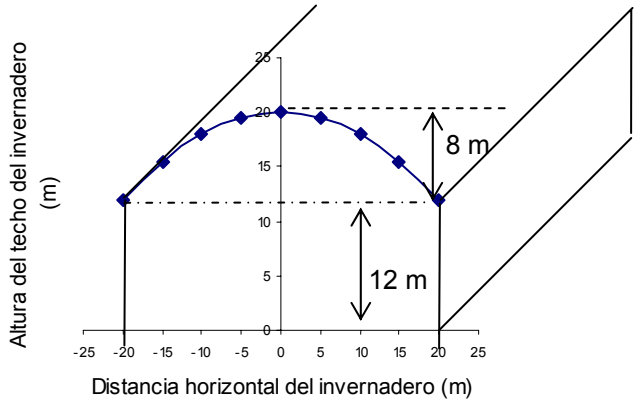
Primeramente se tabulan los datos de la función para x = -20 hasta 20, así tenemos:

x	y(x)
-20	12.0
-15	15.5
-10	18.0
-5	19.5
0	20.0
5	19.5
10	18.0
15	15.5
20	12.0

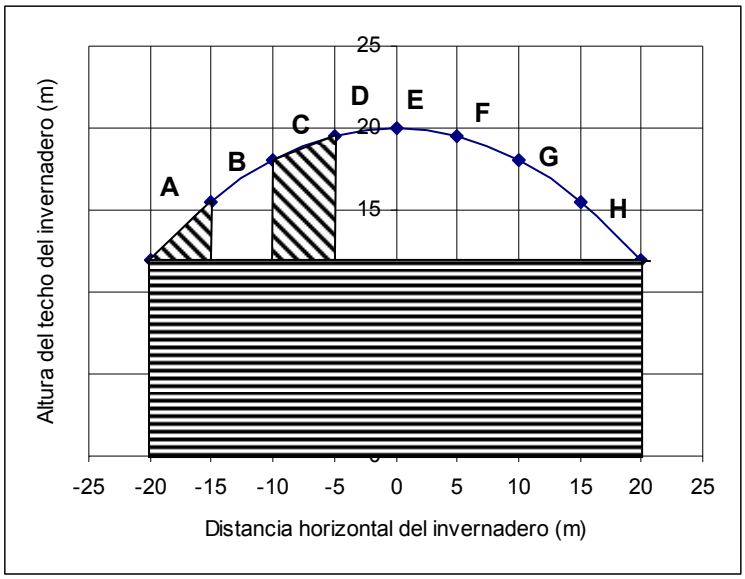
Al graficar estos datos se obtiene la siguiente curva:



Obsérvese que el punto central del techo corresponde a la coordenada en x = 0 y la altura es de 20 metros, si el primer punto del techo tiene una altura de 12 m, significa que entre este y el punto centro existen 8 m de diferencia, por tanto las paredes del invernadero tendrán una altura de 12 m, para que la altura total sea de 20 m como se especifica en el planteamiento inicial del ejercicio.



Para calcular el área del frente del invernadero (área bajo la curva) se utiliza el mismo procedimiento que en el caso de la excavación del túnel, es decir el proceso de discretización del área bajo la curva y calcular el área por partes.



Las figuras de A y H se consideran triángulos y el resto se consideran trapecios, por tanto, el área de las figuras A y H es:

$$A = \frac{bh}{2}$$

b = 5 ; h = (15.5-12)=3.5

$$A = \frac{(5)(3.5)}{2} = 8.75m^2$$

El área de las figura B y G es.

Ejercicio No. 4.- Calcular el volumen de concreto que se requiere para construir una caída de agua sobre un canal, si la parte curva de la caída sigue la tendencia de la siguiente ecuación:

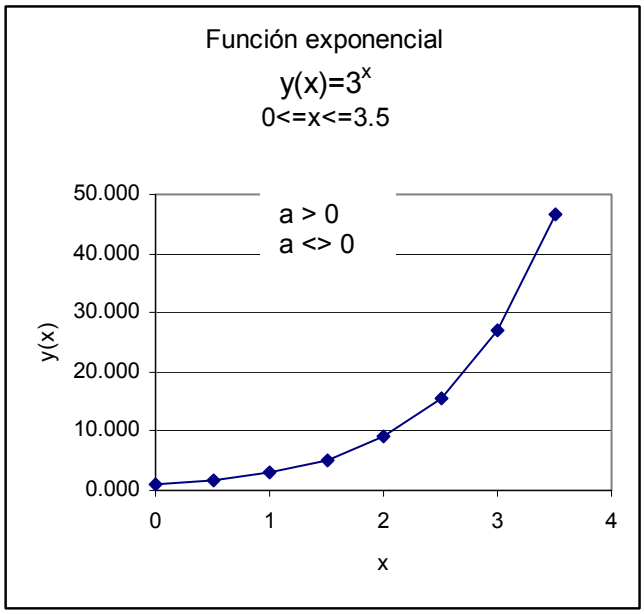
ECUACION PENDIENTE

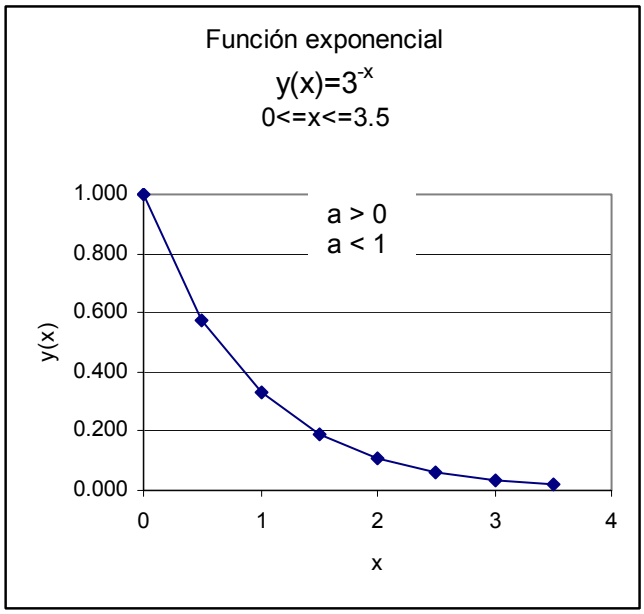
Ejercicio No. 5.-

2.5 FUNCIONES EXPONENCIALES

Definición

Una función exponencial es aquella que tiene la forma $y(x) = b\ a^x$ donde la base "a" es una constante positiva. Es importante mencionar que si la base de la función exponencial es mayor que 1, la gráfica será ascendentes; y si la base se encuentra entre 0 y 1 la gráfica será descendente (pero en el cuadrante contrario). Su dominio es $(-\infty, \infty)$ y su imagen $(0, \infty)$.





Algunas características de las funciones exponenciales crecientes

a) El dominio es el conjunto de los números reales.
b) El recorrido es el conjunto de los números reales positivos.
c) El valor de "y" se acerca a cero pero nunca llegará a cero, cuando x toma valores negativos.
d) Todas las funciones intersectan al eje "y" en el punto (0,1).
e) Son funciones continuas.
f) El límite de $y = a^x$ se aproxima a cero, cuando x disminuye indefinidamente, estos es:

$$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$$

Algunas características de las funciones exponenciales crecientes

g) El dominio es el conjunto de los números reales.
h) El recorrido es el conjunto de los números reales positivos.
i) El valor de "y" se acerca a cero pero nunca llegará a cero, cuando x toma valores positivos.
j) Todas las funciones intersectan al eje "y" en el punto (0,1).
k) Son funciones continuas.
l) El límite de $y = a^{-x}$ se aproxima a cero, cuando x aumenta indefinidamente, estos es:

$$\lim_{x \to \infty} a^{-x} = 0$$

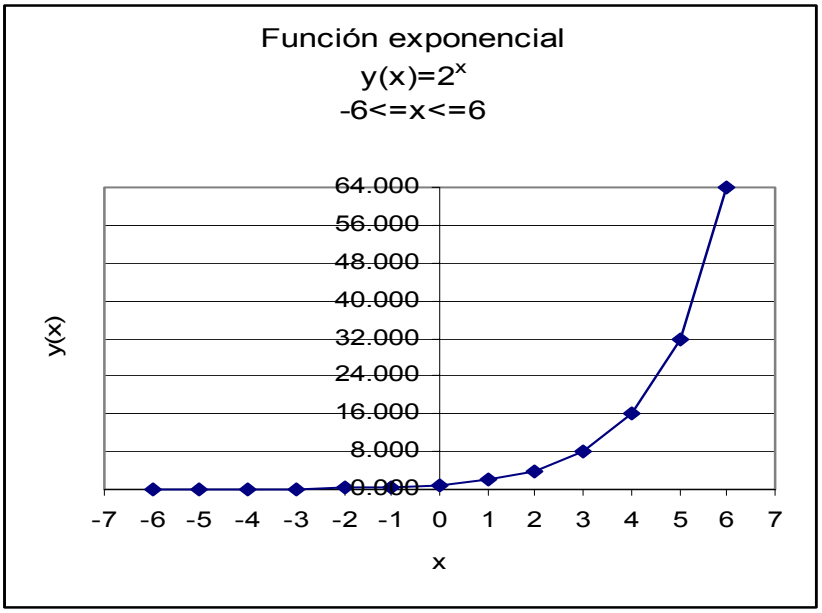
Ejercicios de práctica para que el alumno obtenga el cuadro con datos y realice la gráfica, a partir de la ecuación de la función.

1.- Partiendo de la función $y(x) = 2^x$ obtenga la tabla de datos considerando a x mayor que -6 y menor que 6. Una vez realizada la tabla de datos, dibuje la gráfica correspondiente.

Tabla de datos

x	y(x)
6	64.000
5	32.000
4	16.000
3	8.000
2	4.000
1	2.000
0	1.000
-1	0.500
-2	0.250
-3	0.125
-4	0.063
-5	0.031
-6	0.016

Gráfica de la función

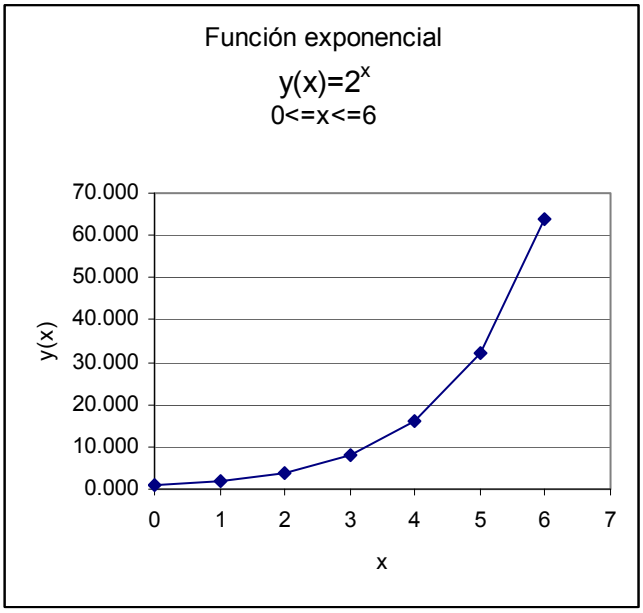


2.- Partiendo de la función $y(x) = 2^x$ obtenga la tabla de datos considerando a x mayor que 0 y menor e igual que 6. Una vez realizada la tabla de datos, dibuje la gráfica correspondiente.

Tabla de datos

x	y(x)
0	1.000
1	2.000
2	4.000
3	8.000
4	16.000
5	32.000
6	64.000

Gráfica de la función

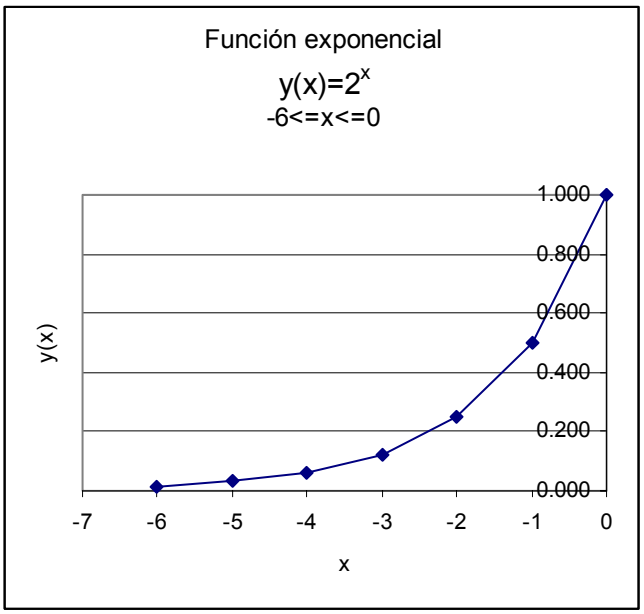


3.- Partiendo de la función $y(x) = 2^x$ obtenga la tabla de datos considerando a x menor que 0 y mayor e igual que -6. Una vez realizada la tabla de datos, dibuje la gráfica correspondiente.

Tabla de datos

x	y(x)
0	1.000
-1	0.500
-2	0.250
-3	0.125
-4	0.063
-5	0.031
-6	0.016

Gráfica de datos



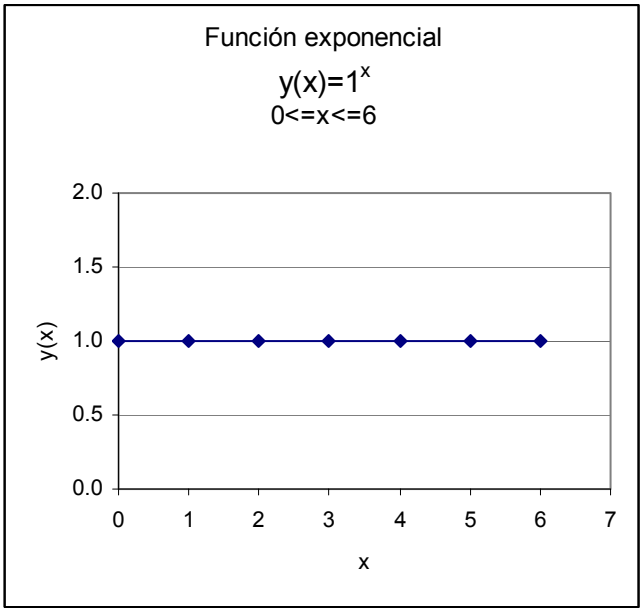
3.- Partiendo de la función $y(x) = 1^x$ obtenga la tabla de datos considerando a x mayor o igual que 0 y menor o igual que 6. Una vez realizada la tabla de datos, dibuje la gráfica correspondiente.

Tabla de datos

x	y(x)
0	1.0
1	1.0
2	1.0
3	1.0
4	1.0
5	1.0
6	1.0

Observe e la fu exponenc se con en una nstante coincide en la coordenada "y" con el valor de la base.

Gráfica de la función

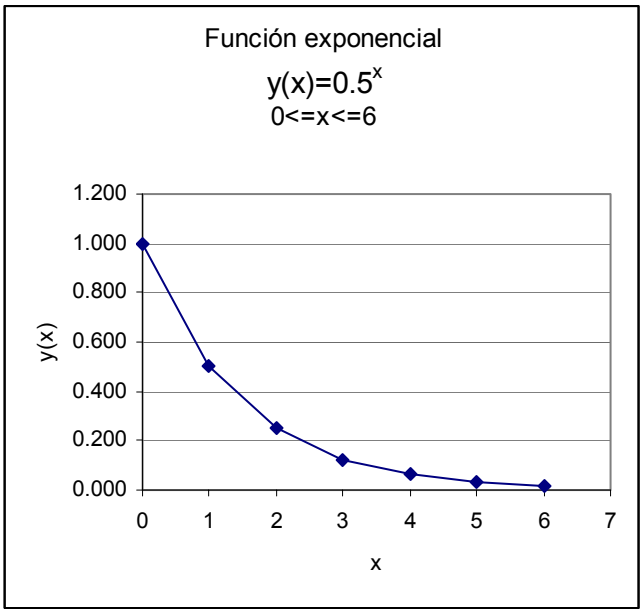


4.- Partiendo de la función $y(x) = 0.5^x$ obtenga la tabla de datos considerando a x mayor o igual que 0 y menor o igual que 5. Una vez realizada la tabla de datos, dibuje la gráfica correspondiente.

Tabla de datos

x	y(x)
0	1.000
1	0.500
2	0.250
3	0.125
4	0.063
5	0.031
6	0.016

Gráfica de la función



IMPORTANTE: Las curvas de funciones exponenciales son asintóticas al eje x. Es decir, se acercan al eje pero nunca lo tocan.

APLICACIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES EN TEMAS DE AGRONOMÍA

Ejercicio No. 1 .- El crecimiento de un cultivo de bacterias es tal que a cada hora se duplica el número de las mismas. En estas condiciones si había 1000 bacterias al iniciar el experimento, el número habrá aumentado a 2000 después de una hora, 4000 después de dos horas y así sucesivamente. Registrando los datos en una tabla:

t	y(t)
0	1000
1	2000
2	4000
3	8000
4	16000

Donde t es el tiempo en horas y y(t) es el número de bacterias presente en el cultivo en el tiempo.

a) Encuentre la ecuación de la función que representa los datos de la tabla.
b) Una vez determinada la función, calcule la población de bacterias que habrá en 24 horas.
c) Realice la gráfica de la función.

a) Ecuación de la función

Para encontrar la ecuación de la función, primeramente se determina el valor de "b" de la ecuación $y(t) = b\,a^t$

Recordando las propiedades de los exponentes, cualquier valor base elevado a la cero es igual a 1, por tanto, para el tiempo inicial (t = 0) el valor de $a^x = 1$ independientemente del valor de "a". La ecuación quedaría entonces:

y(t) = 1000 para t = 0

1000 = b (1) = 1000

Posteriormente se determina el valor de la base (a) para cualquier t <> 0

Para t = 1

$y(t) = b\ a^t$

Recordando las leyes de los exponentes, cualquier base elevada a la primera potencia (1) resulta en el mismo valor de la base, por tanto:
$a^t = a^1 = a$

$y(t) = b\ a$

$a = y(t) / b$

$a = 2000/1000 = 2$

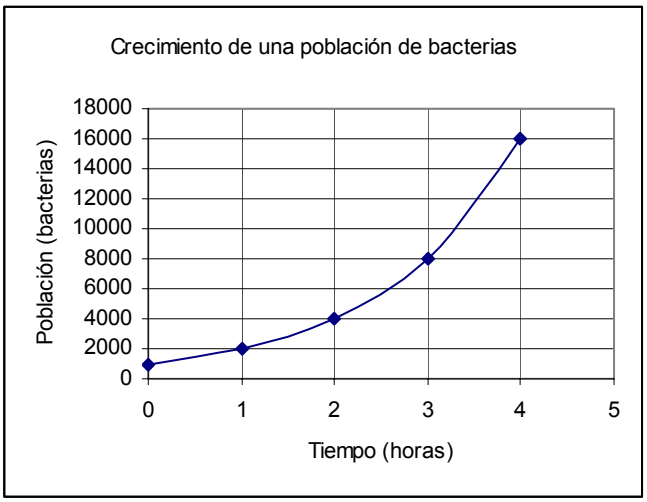
la ecuación de la función sería entonces:

$$\mathbf{y(t) = 1000\ (2)^t}$$

b) Una vez determinada la ecuación de la función se calcula la población que habrá a las 24 horas de tiempo.

$$\mathbf{y(t) = 1000\ (2)^{24} = 16{,}777{,}216{,}000 \text{ bacterias}}$$

c) Realice la gráfica de la función



Ejercicio No. 2.- El crecimiento de una plaga de chapulines sigue un crecimiento exponencial que puede ser modelado por la ecuación $A(t) = Ao\ e^{kt}$. Si inicialmente había 1000 chapulines y después de un día la población de estos aumenta a 1800.

a) Encuentre el valor de k para contar con la ecuación de la función completa.
b) Grafique para t = 0 hasta 10
c) Cuantos chapulines habrá en el cultivo a los 30 días
d) Cuanto tiempo tendrá que pasar para que la población sea de 10,000 chapulines.

Datos del ejercicio:

Población inicial = 1000 cuando t = 0, por tanto Ao = 1000

El exponencial (e) es un valor constante = 2.7183 redondeado a 4 cifras.

El exponencial sigue las mismas leyes que los exponentes, es decir, al multiplicar k por 0 el valor es 0, por tanto la $e^0 = 1$

A(t) = 1000 (1) = 1000 para t = 0

a) Cálculo del valor de k

Para obtener el valor de k se toma el valor de t = 1, sustituyendo los valores del problema en la ecuación del modelo, esta quedaría como sigue:

A(t=1) = 1800 chapulines
Ao = 1000
t = 1

$1800 = 1000\ e^{(k*1)}$; el exponente de la e quedaría k*1 = k; se despeja el valor del exponencial (e)

$e^k = 1800/1000 = 1.8$

Para encontrar el valor de k se aplica la función inversa de la exponencial (e). La función inversa en cuestión es el logaritmo natural o logaritmo neperiano (Ln).

$Ln\ (e^k) = Ln\ (1.8)$

El ln y la exponencial (e) se eliminan quedando como sigue:

K = Ln (1.8) = 0.588

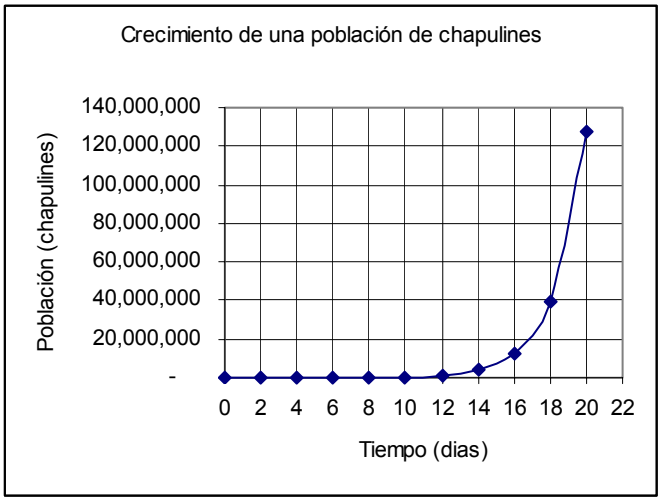
La ecuación que representa a esta función es entonces:

$$\mathbf{A(t) = 1000\ e^{(0.588t)}}$$

b) Gráfica de la función considerando t = 0 hasta 20

Tabla de datos

t	A(t)
0	1,000
2	3,241
4	10,507
6	34,056
8	110,388
10	357,809
12	1,159,797
14	3,759,345
16	12,185,476
18	39,497,790
20	128,027,453



c) Calcular la población de chapulines a los 30 días.

t = 20 días

A(t) = 1000 $e^{(0.588*20)}$ = 45,809,406,038 chapulines

d) Para determinar el tiempo en que se tendrían 10,000 chapulines

Datos:

A(t) = 10,000 chapulines
K = 0.588

Se sustituyen los datos en la ecuación obtenida para esta función

10,000 = 1000 $e^{(0.588\ t)}$

Se despeja el valor del exponencial

$$\frac{10000}{1000} = e^{(0.588t)} = 10$$

Para sacar el valor del exponente de la base "e" se utiliza la función inversa, que en este caso corresponde al logaritmo neperiano o logaritmo natural (ln), lo cual me dará el valor del exponente dentro del paréntesis.

0.588 t = ln(10) = 2.3

0.588 t = 2.3

Despejando el valor de t

t = 2.3/0.588 = 3.9 días

Lo cual se puede verificar en la tabla de datos, donde se observa que para t = 4 la población apenas rebasa los 10,000 individuos de población.

Ejercicio No. 3.- En un estudio forestal para determinar la curva biológica del algarrobo blanco (Prosopis alba) se dedujo la siguiente función logística de crecimiento (tipo exponencial):

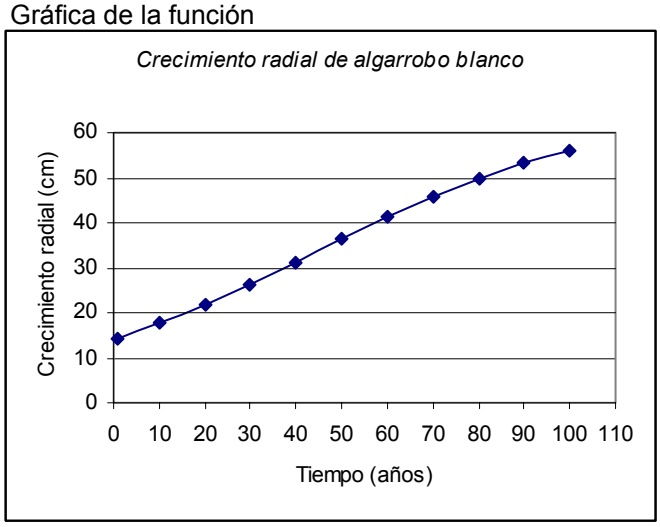
$y(t) = \dfrac{66.77}{1+3.77e^{-0.03t}}$ donde y(t) es el crecimiento radial del tronco del árbol en función de t

a) Obtenga la curva biológica de crecimiento de esta especie, considerando t = 1 hasta 100 años

Tabla de datos de la función

t	y(t)
1	14
10	18
20	22
30	26
40	31
50	36
60	41
70	46
80	50
90	53
100	56

Gráfica de la función



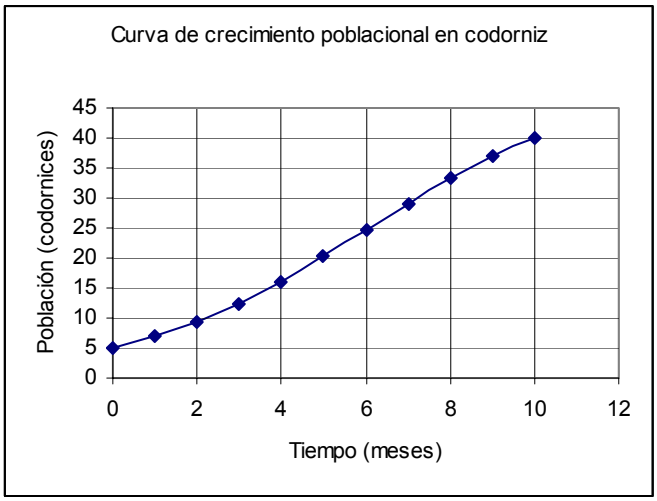
Ejercicio No. 4.- En un estudio para determinar la población de codornices de una zona se obtuvo que la función que representa el crecimiento poblacional es el siguiente:

$$Q(t) = \frac{49.042}{1 + e^{\left[\ln\left(\left(\frac{49.042}{Q_o}\right) - 1\right) - 0.365t\right]}}$$ Donde;

Q = población de codornices
Q_o = población inicial de codornices
t = es el tiempo

Considerando una población inicial (Qo) de 5 codornices, determine la tabla de datos considerando t = 0 hasta t = 10 meses

t (meses)	Q(t)
0	5
1	7
2	9
3	12
4	16
5	20
6	25
7	29
8	33
9	37
10	40



2.5 FUNCION LOGARITMICA

Definición: Se llaman funciones logarítmicas a aquellas funciones de la forma:

$y(x) = \log_a (x)$

donde "a" es una constante y se denomina base del logaritmo.

El logaritmo es la función inversa de la exponencial $y = \log_a (x)$ si y sólo si $x = a^y$

La gran ventaja de las funciones logarítmicas consiste en que crecen mucho más despacio que los propios números. En base 10 por ejemplo, mientras "x" recorre desde 1 hasta 1 billón (10^{12}), mientras que $\log_{10} (x)$ sólo recorre desde 0 hasta 12. Por eso proporcionan una escala adecuada para medir magnitudes cuyos rangos de variación son grandes.

Propiedades de la función logarítmica

a) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a 1 = 0$

d) $\log_a a = 1$

e) $\log_a (y^x) = x \log_a y$

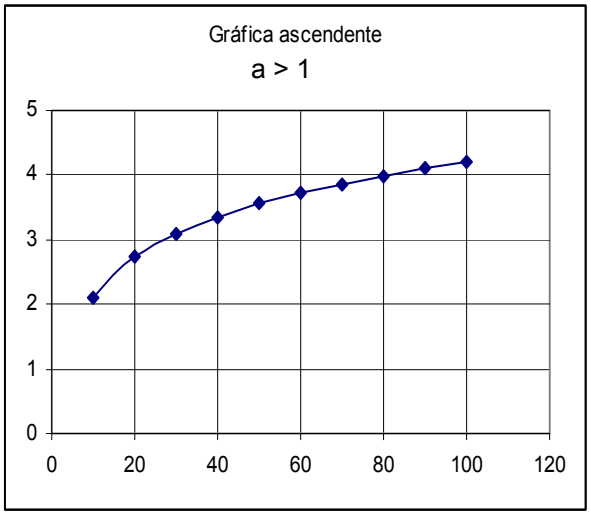
f) $\log_a (1/x) = \log_a x$

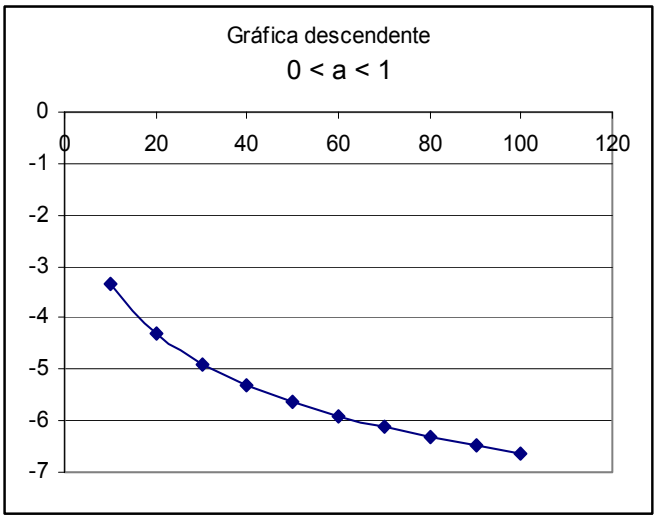
g) Si $a > 1$ la función logarítmica correspondiente es estrictamente creciente; y si $0 < a < 1$ entonces es estrictamente decreciente.

h) Para base $a > 1$ la función logarítmica no esta acotada superior ni inferiormente.

i) Para la base $0 < a < 1$ tampoco esta acotada.

En las siguientes figuras se muestra la gráfica ascendente y descendente:





Los logaritmos decimales son de base 10
Los logaritmos naturales o neperianos son de base e = 2.7183

APLICACIÓN DE ECUACIONES LOGARITMICAS EN TEMAS DE AGRONOMÍA

Ejercicio No. 1.- Un vendedor de productos agroquímicos se maneja con una ecuación de oferta igual a:

$$P(x) = \frac{40}{\log\left[10 + \frac{x}{25}\right]}$$

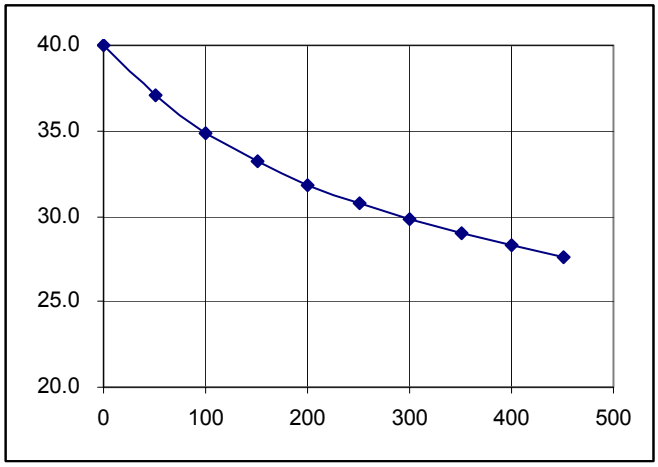
a) Tabule y grafique la función considerando t = 0 hasta 450 para cada 50 productos.
b) ¿A qué precio el vendedor ofrecería 160 productos?
c) Especifique si la función es ascendente o descendente

a) Tabulación y grafica de la función

Tabulación de datos

x	P (x)
0	40.0
50	37.1
100	34.9
150	33.2
200	31.9
250	30.7
300	29.8
350	29.0
400	28.3
450	27.6

Gráfica de la función



b) Precio al que vendería los 160 productos.

$$P(x) = \frac{40}{\log\left[10 + \frac{160}{25}\right]}$$

$$P(x) = \frac{40}{1.2148} = \$32.90 / envase$$

c) Especificar si la función es ascendente o descendente

<u>La función es descendente</u>